Matematica III — Scritto del 06/12/2002 – compito di prova

Esercizio 1. Sia ω la 2-forma

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x^2 + z^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{e}^{\sin z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

definita su $\mathbb{R}^3$. Siano inoltre:

$$\begin{aligned} S &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, z \geq 0\Big\}, \\ R &= S \cup \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 1,\ z = -\Big(1 - x^2 - y^2 + \sqrt{1-x^2-y^2}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

(A) [3 punti] Si dica se ω sia chiusa.

(B) [3 punti] Si dica se esista una 1-forma α tale che $\omega + \mathrm{d}\alpha$ sia chiusa.

(C) [2 punti] Si dica se esista una 2-forma β tale che $\omega + \beta$ sia esatta.

(D) [4 punti] Scelta una orientazione per S, si calcoli $\left|\int_S \omega\right|$.

(E) [3 punti] Scelta una orientazione per R, si dimostri che $\left|\int_R \omega\right| \geq \frac{4\pi}{3}$.

Esercizio 2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^2-1}{t^2+1+\cos t} \\[2ex] x(0) = k. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che per ogni k la x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(B) [2 punti] Si dica se esistano $\lim_{t\to\infty} x_k(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} x_k(t)$.

(C) [3 punti] Si dimostri che $-x_k(-t) = x_{-k}(t)$.

(D) [2 punti] Si determinino i valori di k per cui x_k è pari e quelli per cui x_k è dispari.

(E) [2 punti] Per $|k| < 1$ si studi la convessità di x_k.

(F) [3 punti] Si determinino i valori di k per cui $\lim_{t\to+\infty} x_k(t) = -1$.

Esercizio 3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$, siano $p_1, \dots, p_s \in \Omega$ e sia $f \in \mathcal{H}(\overline{\Omega} \setminus \{p_1, \dots, p_s\})$ non costante, mai nulla su $\partial\Omega$, ed avente poli nei p_j. Siano $a_1, \dots, a_k$ gli zeri di f in Ω. Sia n_l l'ordine dello zero a_l e sia m_j l'ordine del polo p_j.

(A) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione $g \in \mathcal{H}(\overline{\Omega} \setminus \{p_1, \dots, p_s\})$ tale che $g(a_1) \neq 0$ e

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - a_1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{per } z \neq p_1, \dots, p_s, a_1, \dots, a_k.$$

(B) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione $g \in \mathcal{H}(\overline{\Omega} \setminus \{p_2, \dots, p_s\})$ tale che $g(p_1) \neq 0$ e

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_1}{z - p_1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{per } z \neq p_1, \dots, p_s, a_1, \dots, a_k.$$

(C) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione $g \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$ senza zeri in Ω e tale che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_l}{z - a_l} + \sum_{j=1}^{s} \frac{-m_j}{z - p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{per } z \neq p_1, \dots, p_s, a_1, \dots, a_k.$$

(D) [3 punti] Si dimostri che

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} n_l - \sum_{j=1}^{s} m_j.$$

(E) [3 punti] Si dimostri che per ogni $h \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} h(a_l) n_l - \sum_{j=1}^{s} h(p_j) m_j.$$