Il sistema è

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^2-1}{t^2+1+\cos t} \\ x(0) = k \end{cases}$$

e si deve dimostrare che se $k \leq 1$ allora $\lim_{t\to\infty} x_k(t) = -1$ solo per $k = -1$. Chiaramente per $k = -1$ è vero e per $k = 1$ no. Per gli altri k uso il teorema del confronto.

Caso $|k| < 1$. Siccome $x^2 - 1 < 0$ si ha

$$\frac{x^2-1}{t^2+1+\cos t} \geq \frac{x^2-1}{t^2}.$$

Inoltre, siccome $x > -1$, si ha $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) > -2(x+1)$. Dunque

$$\frac{x^2-1}{t^2+1+\cos t} > \frac{-2(x+1)}{t^2}.$$

Sia ora $t_0 > 0$. Considero la soluzione y del sistema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2(y+1)}{t^2} \\ y(t_0) = x_k(t_0). \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene $y'/2(y+1) = -1/t^2$ e integrando si ha $\log(y+1) = 2/t + c$ con c costante opportuna. Da cui

$$y(t) = -1 + \mathrm{e}^{\frac{2}{t}+c}$$

Dal teorema del confronto segue che per $t > t_0$ si ha $x_k(t) > y(t)$. Passando al limite si ottiene

$$\lim_{t\to\infty} x_k(t) \geq \lim_{t\to\infty} y(t) = -1 + \mathrm{e}^c > -1.$$

Caso $k < -1$.
Questo caso è analogo al precedente.

Se $x_k(t) \leq -2$ per ogni $t > 0$, allora chiaramente non potrà essere $\lim_{t\to\infty} x_k(t) = -1$. Possiamo quindi supporre che esista un $t_0 > 0$ per cui si abbia $x_k(t_0) > -2$. Siccome per $k < -1$ la funzione $x_k(t)$ è monotona crescente, si avrà $-2 < x_k(t) < 1$ per ogni $t > t_0$. Dalla disuguaglianza $x^2 - 1 > 0$ si deduce che

$$\frac{x^2-1}{t^2+1+\cos t} \leq \frac{x^2-1}{t^2}.$$

Inoltre, dalla $-2 < x < -1$ si deduce che $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) < -3(x+1)$. Dunque

$$\frac{x^2 - 1}{t^2 + 1 + \cos t} < \frac{-3(x+1)}{t^2}.$$

Sia ora $t_0 > 0$. Considero la soluzione y del sistema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-3(y+1)}{t^2} \\ y(t_0) = x_k(t_0). \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene $y'/(y+1) = -3/t^2$ e integrando si ha $\log(-y-1) = 3/t + c$ con c costante opportuna (si noti che viene $\log(-1-y)$ e non $\log(1+y)$ perché, visto che $x_k(t_0) < -1$, si ha $1 + y(t_0) < 0$). Dunque

$$y(t) = -1 - \mathrm{e}^{\frac{3}{t}+c}.$$

Dal teorema del confronto segue che per $t > t_0$ si ha $x_k(t) < y(t)$. Passando al limite si ottiene

$$\lim_{t\to\infty} x_k(t) \leq \lim_{t\to\infty} y(t) = -1 - \mathrm{e}^c < -1.$$