UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 11/01/03

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ si consideri la 1-forma ω data da

$$\omega(x,y) = \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Per ogni $r \in [0,1)$ sia $\gamma_r : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ la curva data da $\gamma_r(t) = (1-t, (1-t)^{-r})$ e sia $F : [0,1) \to \mathbb{R}$ data da

$$F(r) = \int_{\gamma_r} \omega.$$

(A) [3 punti] Si dica se ω sia chiusa.

(B) [3 punti] Si calcoli l'estremo inferiore dell'insieme $\{F(r) : r \in [0,1)\}$.

(C) [3 punti] Si calcoli l'estremo superiore dell'insieme $\{F(r) : r \in [0,1)\}$.

(D) [3 punti] Si calcoli l'estremo inferiore dell'insieme $\{F(r) : r \in (0,1)\}$.

(E) [3 punti] Si dica se la F sia continua in 0 e se esista $\lim_{r\to 1} F(r)$.

Esercizio 2. Al variare di k e s in $\mathbb{R}$ con $k \neq s$ sia $x_{k,s}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+t}{x-t} \\ x(s) = k \end{cases}$$

definita sul massimo intervallo possibile.

(A) [4 punti] Si discuta l'esistenza locale e globale di $x_{k,s}$ al variare di k ed s.

(B) [3 punti] Si dica se esistano soluzioni $x_{k,s}$ che siano polinomi.

(C) [2 punti] Si dica se esistano, ed in caso affermativo quante sono, soluzioni $x_{k,s}$ tali che $\lim_{t\to 0} x_{k,s}(t) = 0$.

(D) [3 punti] Si tracci un grafico approssimativo delle soluzioni.

(E) [3 punti] Si calcoli $x_{1,1}(2)$.

Esercizio 3. Sia $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+b^2)}$ con b reale positivo.

(A) [3 punti] Si trovino gli zeri e i poli di f indicandone l'ordine.

(B) [4 punti] Per ogni coppia (r, R) di numeri reali tali che $0 < r < b < R$, sia

$$\Omega_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R, \ \Im(z) > 0\}.$$

Si calcoli $\displaystyle\int_{\partial\Omega_{r,R}} f(z)\,dz$.

(C) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione g meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$ e

$$f(z) = \frac{1}{b^2 z} + \frac{g(z)}{z}$$

(D) [5 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+b^2)}\,dx$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.