UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/09/03

Esercizio 1. Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=1, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+(z-1)^2=1, \ z>1\}.$$

Si considerino le funzioni v_1, v_2, v_3 date da

$$v_1(x,y,z) = x^2+2y(x-z)-z^2, \qquad v_2(x,y,z) = (y+z)-(y+z)^2, \qquad v_3(x,y,z) = (x-z)^2$$

e siano v e w i campi di vettori su $\mathbb{R}^3$ con le componenti seguenti:

$$v = (v_1, v_2, v_3), \qquad w = (v_2+v_3, v_3-v_1, -v_2-v_1).$$

(A) [2 punti] Si calcoli l'area di Σ.

(B) [2 punti] Si dica se i campi v e w siano tra loro ortogonali in ogni punto.

(C) [5 punti] Scelta una orientazione per Σ, si calcoli il flusso[1] di v attraverso Σ.

(D) [3 punti] Scelta una orientazione per Σ, si calcoli la circuitazione[2] di v lungo $\partial\Sigma$.

(E) [3 punti] Scelta una orientazione per Σ, si calcoli la circuitazione di w lungo $\partial\Sigma$.

Esercizio 2. Siano x_k e y_k rispettivamete le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} t x_k' = 2x_k \\ x_k(1) = k \end{cases} \qquad \begin{cases} t y_k' = 2y_k \\ y_k(0) = k. \end{cases}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$:

(A) [5 punti] Si discutano esistenza e unicità locale di x_k.

(B) [5 punti] Si discuta l'esistenza globale di x_k.

(C) [5 punti] Si discutano esistenza e unicità locale di y_k.

[1] (Flusso di v) $= \int_\Sigma \langle v | n \rangle$ con n normale a Σ

[2] (Circuitazione di v) $= \int_{\partial\Sigma} \langle v | \tau \rangle$ con τ tangente a $\partial\Sigma$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$$

e sia F la sua trasformata di Fourier. Sia C_r il bordo del disco di raggio r in $\mathbb{C}$ e sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la curva definita da

$$\gamma(t) = 2i\sin(t) + \sin(2t).$$

(A) [4 punti] Si calcoli $F(x)$.

(B) [3 punti] Si caratterizzino tutte le funzioni g meromorfe su $\mathbb{C}$ che coincidono con F sull'asse reale.

(C) [4 punti] Per ogni funzione g come in (B), si calcoli $\int\limits_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z$.

(D) [4 punti] Per ogni funzione g come in (B) e per ogni $r > 0$ si calcoli, se è definito, l'integrale $\int\limits_{C_r} g(z)\,\mathrm{d}z$.