UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/02/03

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la 2-forma ω data da

$$\omega(x,y,z) = (z^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(A) [3 punti] Si dica se ω sia chiusa.

(B) [2 punti] Si dica se esista una 1-forma α tale che $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

(C) [3 punti] Si determinino tutte 2-forme β tale che $\omega - \beta$ sia chiusa.

(D) [3 punti] Posto $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$, si calcoli $\left| \int_R \omega \right|$.

(E) [4 punti] Posto $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1,\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$, si calcoli $\left| \int_S \omega \right|$.

Esercizio 2. Al variare di ε in $[-1,1]$ sia $x_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = \varepsilon t^2\,\mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1/4. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si trovi x_0.

(B) [4 punti] Si trovi x_1.

(C) [3 punti] Si dimostri che x_ε tende puntualmente ad x_0 per $\varepsilon \to 0$. Si dica se la convergenza sia in realtà uniforme.

(D) [5 punti] Si trovi il massimo $M(\varepsilon)$ di x_ε su $[-1,1]$ ed il massimo di $M(\varepsilon)$ per ε in $[-1,1]$.

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; 1/3 < |z| < 2\}$ e sia f la funzione data da:

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z-1}$$

(A) [3 punti] Si dica se nel punto 0 la f abbia una singolarità eliminabile, un polo, o una singolarità essenziale.

(B) [3 punti] Si determinino gli zeri e i poli di f su Ω, specificandone l'ordine.

(C) [3 punti] Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/4} \frac{f(z)}{z} \, \mathrm{d}z.$$

(D) [3 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z) \, \mathrm{d}z$.

(E) [3 punti] Definita la funzione meromorfa g come $g(z) = f(1/z)$, su determinino i punti singolari di g su $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| < 1/3\}$, specificando se sono singolarità eliminabili, poli, o singolarità essenziali.