UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 20/11/03 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** $V = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_5 = 0\}$, $v_1 = {}^t(2,0,1,1,0)$, $v_2 = {}^t(0,5,0,1,3)$.
Si può completare $(v_1, v_2)$ a base di $V$? Se sì farlo.

**2.** $V = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$, $\mathbb{R}^4 = V + W$.
Che dimensione può avere $W$?

**3.** $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 x_2^2 + x_3 x_4^2 \in \mathbb{Z}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$?

**4.** $f : \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, $f(A) = (-1\ 1\ 2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare base di $\mathrm{Ker}(f)$.

**5.** $f : \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] \to \mathbb{R}^5$, $f(1) = (0,1,0,-1,1)$, $\mathbb{R}^5 = V \oplus \mathrm{Im}(f)$. Che dimensione può avere $V$?

**6.** $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, -3e_1 + e_2)$, $\mathcal{C} = (e_1 + 2e_2, -e_1)$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare $[v]_{\mathcal{C}}$.

**7.** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2 - e_3)$,
$\mathcal{C} = (e_1 - e_2 + e_3, -e_2, 2e_1 + e_2)$, $A = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Trovare $(A)_{23}$.



1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

# Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 20/11/03 — Esercizî

**1.** Siano $P = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \ p(-x) = p(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$ e $D = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \ p(-x) = -p(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Sia $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ data da $f(p(x)) = p'(x)$.

(A) (3 punti) Provare che $P$ e $D$ sono sottospazî di $\mathbb{R}[x]$ e che $\mathbb{R}[x] = P \oplus D$. Esibire le proiezioni relative a questa decomposizione.

(B) (3 punti) Provare che $f$ è lineare e che $f(D) \subset P$, $f(P) \subset D$.

Siano ora $g : P \to D$ e $h : D \to P$ tali che $g(p(x)) = f(p(x))$, $h(p(x)) = f(p(x))$.

(C) (3 punti) Provare che $g$ e $h$ sono lineari e determinare $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Ker}(h)$, $\mathrm{Im}(h)$.

(D) (3 punti) Esibire una decomposizione $P = U \oplus V$ tale che la restrizione di $h \circ g$ a $V$ sia una bigezione con $P$.

**2.** Siano $f, g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ date da

$$\Big(f(A)\Big)_{i,j} = \begin{cases} (A)_{i,j} & \text{se } 1 \leqslant i,j \leqslant 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \Big(g(A)\Big)_{i,j} = \begin{cases} (A)_{i-2,j-2} & \text{se } 3 \leqslant i,j \leqslant 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(A) (3 punti) Provare che $f$ e $g$ sono lineari iniettive e che $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.

Sia ora $V = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ e siano $p$ e $q$ le proiezioni relative alla decomposizione $V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$. Sia inoltre $\varphi : V \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ data da

$$\varphi(M)(X) = f^{-1}(p(M)) \cdot {}^{\mathrm{t}}X + X \cdot {}^{\mathrm{t}}\big(g^{-1}(q(M))\big).$$

(B) (3 punti) Dimostrare che $\varphi$ è ben definita e lineare.

(C) (3 punti) Trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

(D) (3 punti) Esibire $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ tale che $\alpha \notin \mathrm{Im}(\varphi)$ e $\alpha \circ \alpha \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

# Risposte esatte

## 5. $\diamondsuit$

**1.** Possibile, con $(0, 0, 0, 1, 0)$ e $(3, -2, 0, 0, 0)$

**2.** Almeno 2

**3.** No

**4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**5.** Tra 1 e 4

**6.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

**7.** $-9/2$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$