UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\int\limits_{Q} \mathrm{d}\omega$ dove $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$ e $\omega(x,y) = \cos y \,\mathrm{d}x + \sin x \,\mathrm{d}y$.

2. Sia $f(x,y) = (x\cos x - y\sin x)\,\mathrm{e}^{-y}$. Trovare g tale che $f + ig$ sia olomorfa.

3. Calcolare $\int\limits_{\partial\Delta(i,2)} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-2i)(z-1)(z-2)}$.

4. Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0,i\})$ avente poli in 0 e in i.
Dove converge lo sviluppo di f in serie di Laurent centrato in 0?

5. Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continua e $S_N(f)$ la sua N-esima approssimazione di Fourier.
È sempre vero che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f - S_N(f)|^2 \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2$?

6. Se $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ è olomorfa per $0 < |z| < 1$, come si calcolano gli a_n in funzione di f?

7. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = x\}$. Calcolare $\int\limits_{S} \langle n | \mathrm{rot}(v) \rangle$ dove n è la normale a S avente terza coordinata positiva, e $v(x,y,z) = (y, -z, x)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Esercizî

1. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = 2\cosh(1) - \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})\}$ e $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo $v(x, y, z) = (\,\mathrm{e}^{-y}(y\,\mathrm{e}^x + 1), -x\,\mathrm{e}^{x-y}, -z(x + y)\,\mathrm{e}^{x-y})$

(A) (2 punti) Si mostri che S è una superficie e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si calcoli l'area di S.

(C) (3 punti) Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leqslant z \leqslant \cosh(1)\}$ e $\nu(x, y, z) = (x, y, 0)$. Si calcoli

$$\int_C \langle v|\nu\rangle.$$

(D) (4 punti) Sia n il campo normale su S con terza coordinata positiva. Si calcoli

$$\int_S \langle v|n\rangle.$$

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \operatorname{arctg} t + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Sia (a, b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione. Si dica se $a > -\infty$ e se $b < +\infty$.

(B) (3 punti) Si calcolino, se esistono

$$\lim_{t\to a} x(t), \qquad \lim_{t\to b} x(t).$$

(C) (3 punti) Si mostri che x non ha punti di massimo locale.

(D) (3 punti) Si mostri che x ha un punto di minimo locale.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 2π

2. $g(x,y) = (x\sin x + y\cos x)\,\mathrm{e}^{-y}$

3. $2\pi i\left(\left.\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=2i} + \left.\frac{z}{(z-2i)(z-2)}\right|_{z=1}\right) = \pi(1-i)$

4. Per $0 < |z| < 1$

5. Sì perché $S_N(f)$ è la combinazione lineare g di $\{e_n\}_{|n|\leqslant N}$ che minimizza $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2$, dunque fa meglio di $g=0$.

6. $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$ per $0 < r < 1$

7. -2π

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$