UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Siano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e $v(x, y) = (x^3, x^2 y)$. Quanto fa $\int_D \operatorname{div}(v)$?

**2.** Qual è l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema $x' = x^3 t^2, \ x(0) = 1$?

**3.** Se $a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = -7$, quanto fa $a_{100}$?

**4.** Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ha in 0 un polo di ordine 1, allora $f(z) - \frac{1}{z}$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$?

**5.** Calcolare $\int_{\partial\Delta(-1,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2i)}$.

**6.** Sia $f(t) = t^2$ per $t \in [-\pi, 0]$ e $f(t) = \cos(t)$ per $t \in (0, \pi]$.
Sia $\alpha_n$ l'$n$-esimo coefficiente di Fourier complesso di $f$. Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$?

**7.** Calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})$ della funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$.



1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Esercizî

**1.**

(A) (3 punti) Si trovi una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

(B) (3 punti) Si risolva il problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -2\,\mathrm{e}^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 2.$$

(Suggerimento: si cerchi una soluzione del tipo $x(t) = \alpha(t) \cdot \mathrm{e}^t$).

(C) (2 punti) Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $u' > 2u$ e $u(0) = 1$.
Si provi che $u$ è positiva su $(0, +\infty)$.

(D) (2 punti) Sia $x$ la soluzione del problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = \sin^2(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 5.$$

Si provi che la funzione $y = x' - 2x$ è positiva su $(0, +\infty)$.
(Suggerimento: si cerchi un problema di Cauchy risolto da $y$).

(E) (2 punti) Si deduca dai punti (C) e (D) che la $x$ del punto (D) è positiva su $(0, +\infty)$.

**2.** Si consideri la funzione $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sin(z)} - 1}$.

(A) (3 punti) Si trovino le singolarità di $f$ sull'asse reale, e se ne discuta il tipo.

(B) (3 punti) Si trovino le singolarità di $f$ fuori dall'asse reale, e se ne discuta il tipo.

(C) (3 punti) Sia $R$ il rettangolo di vertici $-7\pi/2 - i,\ 7\pi/2 - i,\ 7\pi/2 + i,\ -7\pi/2 + i$.
Si calcoli $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(D) (3 punti) Si calcoli $\int_{\partial R} \frac{\cos(z) \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)}}{\mathrm{e}^{\sin z} - 1}\,\mathrm{d}z$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

# Risposte esatte

## 5. $\diamondsuit$

**1.** $\pi$.

**2.** $(-\infty,(3/2)^{1/3})$.

**3.** $3^{100}-4^{100}$.

**4.** Solo se il residuo è 1, altrimenti no.

**5.** $-\pi$.

**6.** $1/2$.

**7.** $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(x)=\frac{2\sin(x)}{x}$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$