UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Siano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e $v(x, y) = (xy^2, y^3)$. Quanto fa $\int_D \operatorname{div}(v)$?

2. Qual è l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema $x' = x^4 t, \ x(0) = 1$?

3. Se $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = -7$, quanto fa a_{100}?

4. Se $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ha in 0 un polo di ordine 1, allora $g(w) - \frac{1}{w}$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$?

5. Calcolare $\int_{\partial\Delta(1,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z+2i)}$.

6. Sia $f(t) = \sin(t)$ per $t \in [-\pi, 0]$ e $f(t) = \mathrm{e}^t$ per $t \in (0, \pi]$.
Sia α_n l'n-esimo coefficiente di Fourier complesso di f. Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$?

7. Calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})$ della funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Esercizî

1.

(A) (3 punti) Si trovi una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

(B) (3 punti) Si risolva il problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -2\,\mathrm{e}^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 2.$$

(Suggerimento: si cerchi una soluzione del tipo $x(t) = \alpha(t) \cdot \mathrm{e}^t$).

(C) (2 punti) Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $u' > 2u$ e $u(0) = 1$.
Si provi che u è positiva su $(0, +\infty)$.

(D) (2 punti) Sia x la soluzione del problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = \sin^2(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 5.$$

Si provi che la funzione $y = x' - 2x$ è positiva su $(0, +\infty)$.
(Suggerimento: si cerchi un problema di Cauchy risolto da y).

(E) (2 punti) Si deduca dai punti (C) e (D) che la x del punto (D) è positiva su $(0, +\infty)$.

2. Si consideri la funzione $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sin(z)} - 1}$.

(A) (3 punti) Si trovino le singolarità di f sull'asse reale, e se ne discuta il tipo.

(B) (3 punti) Si trovino le singolarità di f fuori dall'asse reale, e se ne discuta il tipo.

(C) (3 punti) Sia R il rettangolo di vertici $-7\pi/2 - i$, $7\pi/2 - i$, $7\pi/2 + i$, $-7\pi/2 + i$.
Si calcoli $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(D) (3 punti) Si calcoli $\int_{\partial R} \frac{\cos(z) \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)}}{\mathrm{e}^{\sin z} - 1}\,\mathrm{d}z$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. π.

2. $(-(2/3)^{1/2}, (2/3)^{1/2})$.

3. $2^{100} - 5^{100}$.

4. Solo se il residuo è 1, altrimenti no.

5. π.

6. $1/2$.

7. $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(x) = \frac{2\sin(x)}{x}$.

1. ♡	2. ♣	3. ♠	4. ♢	5. ♡	6. ♠	7. ♠	8. ♢	9. ♣	10. ♡