UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 20/11/04 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(0)=0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0)=1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0)=-1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0)=-2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0)=3$.
$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial y_1}(0)=7$, $\frac{\partial g}{\partial y_2}(0)=-5$. Calcolare $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_2}(0)$.

**2.** $\alpha(t)=(\frac{1}{3}t^3,1,t)$, $t\in[0,1]$. In quale di questi intervalli cade la lunghezza di $\alpha$?
$(0,1)$, $[1,\frac{6}{5})$, $[\frac{6}{5},2)$, $[2,+\infty)$.

**3.** $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (z^2-x^2-y^2)(x-z-z^3)=0\}$.
Quali sono i punti vicino a cui $\Sigma$ non è una superficie?

**4.** $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$. Calcolare $\int_S (z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

**5.** La soluzione di $\begin{cases} x'=-x(x^2+t^2)\\ x(0)=1\end{cases}$ è definita su $(-\infty,0]$ e su $[0,+\infty)$?

**6.** $\begin{cases} a_{n+3}=18a_n+3a_{n+1}-4a_{n+2}\\ a_0=1,\ a_1=-1,\ a_2=22.\end{cases}$ Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}3^{-n}a_n$.

**7.** $f_n(t)=n^{-3/2}\sin(nt)$, $t\in[-\pi,\pi]$. La $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ è continua? Esiste $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 20/11/04 — Esercizî

**1.** Sia $\sigma : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t,z) = \begin{pmatrix} (2+z)\cos t \\ (2-z)\sin t \\ z \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che l'immagine $\Sigma$ di $\sigma$ è una superficie limitata con bordo, e che le restrizioni di $\sigma$ la parametrizzano localmente.

(B) (3 punti) Dire se $\Sigma$ sia ottenuta dalla rotazione di una curva contenuta in uno dei piani coordinati.

Orientare ora $\Sigma$ a piacimento.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\Sigma (z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\Sigma n_3$, dove $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ è la normale a $\Sigma$ determinata dall'orientazione.

**2.** Sia $x_\alpha$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 - t^2 - 1 \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Provare che $x_{-\alpha}(t) = -x_\alpha(-t)$.

(B) (3 punti) Dire per quali $\alpha$ la $x_\alpha$ sia un polinomio.

(C) (4 punti) Discutere l'intervallo di esistenza di $x_\alpha$, provando in particolare che $x_\alpha$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ se $|\alpha| \leqslant 1$.

(D) (3 punti) Calcolare $\lim_{t\to\pm\infty} x_\alpha(t)$ per $|\alpha| \leqslant 1$.

# Risposte esatte

## 5. $\diamondsuit$

**1.** $7 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3 = -22$

**2.** $[1, \frac{6}{5})$

**3.** $(0, 0, 0)$

**4.** $\pi$

**5.** Su $[0, \infty)$ esiste perché decresce ed è positiva. Su $(-\infty, 0]$ no, confrontando con $y' = -y^3$.

**6.** $a_n = 2^n + n(-3)^n$, dunque il limite non esiste.

**7.** $\|f_n\| = n^{-3/2}$ dunque $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è continua; $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0)$ non converge.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$