UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 26/1/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Siano $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$ per $t \in [0,1]$ e $\beta(t) = (t\cos(t), 0, t\sin(t))$ per $t \in [0,2]$.
Quale delle due è più lunga?

2. Sia $\sigma(\vartheta, z) = (2(1-z)\cos\vartheta, (1-z)\sin(\vartheta), z)$ per $(\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times [0,1]$.
Calcolare $\int_\sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

3. Trovare, se esiste, il punto di minimo di $(x+2)^2 + (z-1)^2$ su $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = z^2\}$.

4. Risolvere $a_{n+3} = -a_{n+2} + 10a_{n+1} - 8a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$.

5. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$, $v(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\cdot(x,y,z)$.
Calcolare $\int_\Omega \operatorname{div}(v)$.

6. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-ix^3/\pi^2}$ per $|x| \leqslant \pi$. La serie di Fourier di f converge a f uniformemente?

7. Se $g(t) = f(t+1)$, quanto fa $\frac{\mathcal{F}(g')(x)}{\mathcal{F}(f)(x)}$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 26/1/04 — Esercizî

1. Sia $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z(x^2+y^2)^{1/2} = 1, \ 1/2 \leqslant z \leqslant 2\right\}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che F è una superficie con bordo e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Sia $f(x,y,z) = (x^2+y^2)z^{-2}$. Si calcoli l'integrale di f su F.

(C) (2 punti) Si calcoli il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z(x^2+y^2)^{1/2} \leqslant 1, \ 1/2 \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

(D) (4 punti) Si calcoli l'integrale su F della forma

$$\omega = \sin z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \left(y \cos z + \mathrm{e}^{x^2} \sin z\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + \left(\mathrm{e}^{y^2+z^2} + \operatorname{arctg}(y)\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

2. Sia $n \geqslant 1$ un numero intero e si consideri la funzione $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{i\pi z^n}}{1+z^{2n}}$.

(A) (3 punti) Si mostri che f è meromorfa su $\mathbb{C}$ e si trovino le sue singolarità.

(B) (3 punti) Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 2, \ \Im(z) \geqslant 0\}$. Si calcoli $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$.

(C) (3 punti) Si calcoli il residuo di f in ciascuna singolarità.

(D) (3 punti) Sia $R > 1$. Si calcoli l'integrale di f lungo la curva

$$C_R = \{t : \ t \in [0,R]\} \cup \{R\,\mathrm{e}^{i\vartheta} : \ \vartheta \in [0,\pi/n]\} \cup \{t\,\mathrm{e}^{i\pi/n} : \ t \in [0,R]\}.$$

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. β

2. 2π

3. $(-3/2, 0, 3/2)$

4. $a_n = 2 - 2^n$

5. 2π

6. Sì

7. $ix\,\mathrm{e}^{ix}$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$