UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 15/1/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^{3n} \right) \mathrm{d}x$.

2. Intorno a quali punti l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2yz + x^2 = 2xz + y^2 = 0\}$ non è una curva?

3. Si provi che le soluzioni dell'equazione differenziale $x' = \cos(x) - \sin(t^2)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 13$. Quanto fa $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} a_n$?

5. Sia $f(x) = \frac{x+x^2}{|x|}$ per $0 < |x| < \pi$. Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(f)$?

6. Se $F = \mathcal{F}(f)$, $g(x) = f'(x-3)$ e $G = \mathcal{F}(g)$, che legame c'è tra G e F?

7. Discutere la natura del punto stazionario $(0,0)$ per il sistema $\begin{cases} x' = y\,\mathrm{e}^x + xy \\ y' = \sin(y-x). \end{cases}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 15/1/05 — Esercizî

1. Per ogni a in $\mathbb{R}$ sia $\Sigma_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+(z-a)^4 = 1\}$. Sia inoltre ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definita da $(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot (x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$. Per ogni $r > 0$ si indichi con S_r la sfera di raggio r centrata nell'origine, orientata dalla normale "uscente".

(A) (2 punti) Si provi che Σ_a è una superficie e si trovino i due valori a_1, a_2 di a tali che $0 \in \Sigma_a$.

(B) (2 punti) Si dimostri che ω è chiusa.

(C) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{S_1} \omega$.

(D) (2 punti) Si dimostri che $\int\limits_{S_r} \omega = \int\limits_{S_1} \omega$ per ogni $r > 0$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{\Sigma_a} \omega$ al variare di a in $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2\}$.

2. Si consideri la funzione meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{iz}}{z^2(z^2+1)}$.

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f e se ne calcolino i relativi residui.

Per ogni $R > 1$ si considerino le curve

$$\begin{array}{llll} \gamma_R^1 : [-R, -1/R] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^1(t) = t, & \gamma_R^2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^2(t) = \mathrm{e}^{i(\pi-t)}/R, \\ \gamma_R^3 : [1/R, R] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^3(t) = t, & \gamma_R^4 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, & \gamma_R^4(t) = R\,\mathrm{e}^{it}. \end{array}$$

(B) (2 punti) Si dimostri che $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R^4} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(C) (3 punti) Si dimostri che $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z = -i\pi \mathrm{Res}(f, 0)$, dove $\mathrm{Res}(f,0)$ è il residuo di f in 0.

(Suggerimento: si scriva $f(z) = a/z + h(z)$, dove h è olomorfa in un intorno dell'origine).

(D) (2 punti) Si dimostri che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = (1-\cos x)/(x^2(x^2+1))$ è continua e integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Risposte esatte

5. ♡

1. 4/7.

2. $(0, 0, 0)$.

3. La derivata è limitata tra -2 e 2

4. Non esiste.

5. 0

6. $G(t) = it\,\mathrm{e}^{-3it}F(t)$.

7. Si tratta di un fuoco repulsivo.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡