UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 27/6/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Quanto è lunga la curva $\alpha(t) = (2\cos(t), t, 2\sin(t))$ per $t \in [0,1]$?

2. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| + |y| \leqslant 1, \ z = 1 - |x| - |y|\}$.
Calcolare $\int_S (\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z)$.

3. In quali punti l'equazione $x^2\cos(yz) + \cos(x) = 0$ non soddisfa le ipotesi del teorema delle funzioni implicite?

4. Risolvere il problema $a_{n+3} = 7a_{n+1} + 6a_n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 12$.

5. Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 = 1 + x^2, \ x^2 \leqslant 1\}$ e

$$v(x,y,z) = (\log(2 + \sin(xyz)), xz, (1-x^2)\,\mathrm{e}^{\sin(z)} - xy).$$

Sia n un campo normale unitario ad S. Calcolare $\int_S \langle \mathrm{rot}(v) | n \rangle$.

6. Sia $f(t) = (t-1)^3$ e siano $\alpha_n(f)$ i coefficienti di Fourier di f. Calcolare $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$.

7. Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ è limitata, come si ricava $f(x)$ in funzione della trasformata di Laplace $F = \mathcal{L}(f)$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 27/6/05 — Esercizî

1. Al variare di a in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \frac{t(1-2x(t)-x^2(t))}{(1+t^2)(1+x(t))} \\ x(1) = a, \end{cases}$ e sia $x_a : I_a \to \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale, dove I_a è un intervallo di $\mathbb{R}$ contenente 1.

(A) (3 punti) Si determini $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $I_a \ni t \mapsto F(t, x_a(t))$ sia costante per ogni a.

(B) (3 punti) Si determini esplicitamente x_a in un intorno di 1.

(C) (2 punti) Si dimostri che $I_a = (-\infty, \infty)$ se $a < -2$ oppure $a > 0$.

(D) (2 punti) Si determini I_a per ogni a con $-2 < a < 0$.

(E) (2 punti) Si provi che $\begin{cases} (1 + x(t))x'(t) = \frac{t(1-2x(t)-x^2(t))}{1+t^2} \\ x(0) = -1, \end{cases}$ ha più di una soluzione locale.

2. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ dati da

$$\Omega_1 = \{\rho e^{i\vartheta} : \ \rho > 0,\ -\pi/6 < \vartheta < \pi/2\}, \quad \Omega_2 = \{\rho e^{i\vartheta} : \ \rho > 0,\ -\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2\}, \quad f(z) = z^3.$$

(A) (3 punti) Si dimostri che f è invertibile con inversa olomorfa $g : \Omega_2 \to \Omega_1$, e si descriva esplicitamente g in coordinate polari.

Sia ora h la funzione meromorfa su Ω_2 definita da $h(z) = g(z)/(1+z^2)$, e per ogni $R > 1$ si considerino i seguenti cammini $\gamma_R^1 : [-R, -1/R] \to \Omega_2$, $\gamma_R^2 : [-\pi, 0] \to \Omega_2$, $\gamma_R^3 : [1/R, R] \to \Omega_2$, $\gamma_R^4 : [0, \pi] \to \Omega_2$:

$$\gamma_R^1(t) = t,\ \gamma_R^2(t) = e^{it}/R,\ \gamma_R^3(t) = t, \gamma_R^4(t) = Re^{it}.$$

(B) (2 punti) Si dimostri che per ogni $x > 0$ si ha $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(-x) = (1/2 + i\sqrt{3}/2)\sqrt[3]{x}$, e se ne deduca che $\int_{\gamma_R^1} h(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R^3} h(z)\,\mathrm{d}z = (3/2 + i\sqrt{3}/2) \int_{1/R}^{R} \sqrt[3]{t}/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

(C) (2 punti) Si determinini l'unico polo di h ed il relativo residuo (si ricordi che h è definita su Ω_2).

(D) (2 punti) Si dimostri che $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^2} h(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^4} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(E) (3 punti) Si calcoli $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\sqrt{5}$

2. ± 2

3. Nessuno.

4. $3(-1)^n + 3^n$.

5. 8π.

6. $-1 - 3\pi^2$.

7. $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{zx} F(z)\, \mathrm{d}z$ per $c > 0$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$