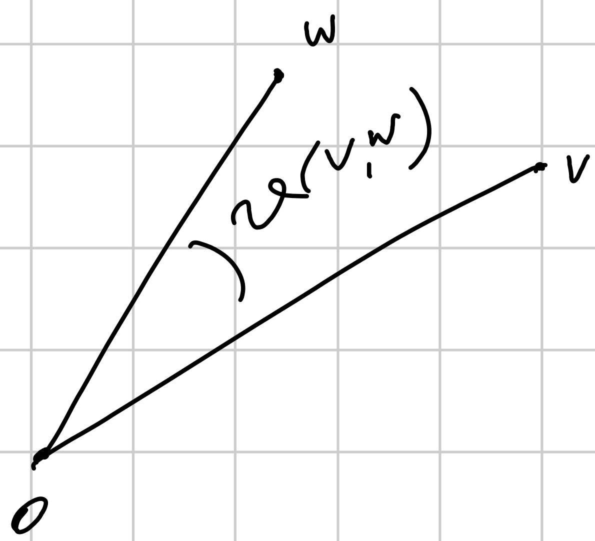
Geometria 6/3/15

$\bar{V}$ sp. vett. reale con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scalare.

- $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$
- $d(v,w) = \|v-w\|$
- $\cos\left(\vartheta(v,w)\right) = \dfrac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$

$(v,w \neq 0)$.



• Definiamo v, w ortogonali se $\langle v|w\rangle = 0$ (ha senso, ed è vero, anche se v o w sono 0).

<u>Prop</u>: Se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori ortogonali tra loro ($\langle v_i|v_j\rangle = 0$ per $i \neq j$) e non nulli allora sono lin. indip.

(<u>Oss</u>: senza ipotesi "ortogonali" la verifica di "lin. indip." richiede la soluz. di sistema $n \times n$)

Dim: Dobbiamo provare che se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Infatti:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_j \rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle}_{\text{tutti addendi nulli tranne che per } i=j}$$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_j \rangle = \langle 0 | v_j \rangle = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_j \cdot \underbrace{\| v_j \|^2}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0.$$

∎

Es:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$$

sono ortog. tra loro in $\mathbb{R}^3$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ e non nulli $\Rightarrow$ lin. indip.

Def: un vettore v si dice <u>unitario</u> se $\|v\| = 1$.
Un sistema di vettori $v_1, \dots, v_n$ si dice <u>ortonormale</u> se $v_1, \dots, v_n$ sono ortog. tra loro e unitari, cioè: $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Consideriamo per V basi ortogonali e
basi ortonormali.

<u>Prop</u>: Se $v_1, \dots, v_n$ è una base ortogonale di V allora $\forall v \in V$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v / v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j .$$

<u>Oss</u>: 1) Senza l'ipotesi "ortogonale" il calcolo delle coordinate richiede sistema $n \times n$

2) Le coordinate di v lungo v_j rispetto alla base ortog. $(v_1, \dots, v_n)$ dipende solo da v_j, non da tutta la base.

Esempio: 1) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} \right)$

è base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$

se ignoro il fatto che sono ortog....

Risolvo $\begin{cases} 3\alpha + 4\beta - \gamma = 7 \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} 31/14 \\ 5/45 = 1/9 \\ 75/(1+100+23^2) \end{pmatrix}$$

2) $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$ è ortog

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 31/14 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Dimo (Prop): devo vedere che se $v_1, \dots, v_n$ è base ortog. di V allora
$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j \, .$$

Provo prima che: se $w \in V$ e $\langle w | v_i \rangle = 0 \ \forall i$ allora $w = 0$.

Infatti, poiché $v_1, \dots, v_n$ è base di V, ho
$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{per opportuni } \alpha_1, \dots, \alpha_n .$$
Ora
$$0 = \langle w | v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_i \rangle = \alpha_i \cdot \underbrace{\| v_i \|^2}_{\neq 0}$$

$\Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad \Longrightarrow w = 0$.

Sapendo ciò, pongo

$$w = v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j$$

e devo vedere che $w = 0$, dunque mi basta vedere che $\langle w | v_i \rangle = 0 \ \forall i$. Infatti:

$$\langle w | v_i \rangle = \left\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} v_j \middle| v_i \right\rangle =$$

$$= \langle v | v_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot \underbrace{\langle v_j | v_i \rangle}$$

vale 0 per $j \neq i$

vale $\| v_i \|^2$ per $j = i$

$$= \langle v | v_i \rangle - \frac{\langle v | v_i \rangle}{\| v_i \|^2} \cdot \| v_i \|^2 = 0 \; . \qquad \blacksquare$$

Q : Come costruire basi ortogonali ?

A : Procedimento di ortonormalizzazione di

Gram-Schmidt:

Prop: data $v_1, \dots, v_n$ base di V il seguente procedimento fornisce una base $w_1, \dots, w_n$ ortonormale di V:

$$w_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle w_1 \quad , \quad w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\| \tilde{w}_2 \|}$$

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle \cdot w_2 ,$$

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\| \tilde{w}_3 \|}$$

...

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1} | w_j \rangle \cdot w_j , \quad w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\| \tilde{w}_{k+1} \|} .$$

<u>Attenzione</u>: devo anche verificare che la procedura si può condurre fino in fondo, cioè che non si divide mai per 0.

$\underline{ES}$:

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{13}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 30 \\ -11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\cancel{\frac{1}{14}} \begin{pmatrix} 30 \\ -11 \\ 27 \end{pmatrix}}{\left\| \cancel{\frac{1}{14}} \begin{pmatrix} 30 \\ -11 \\ 27 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{900+121+729}} \begin{pmatrix} 30 \\ -11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Verifico che $w_2 \perp w_1$ ($\perp$ = "ortogonale")

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 30 \\ -11 \\ 27 \end{pmatrix} \right\rangle = 60 - 33 - 27 = 0 \quad \text{OK!}$$