Alg. Lin 4/11/2015

Teo l'applicaz

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$A \longmapsto f_A$$

è lineare e bigettiva.

DIM

$$f_{(\underbrace{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}_{\text{operazioni tra matrici}})} = \underbrace{\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}}_{\text{operazioni tra funzioni}}$$

uguaglianza di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f_{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)}(x) = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\left(\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}\right)(x) \overset{?}{=} \lambda_1 f_{A_1}(x) + \lambda_2 f_{A_2}(x) =$$

$$= \lambda_1 A_1 x + \lambda_2 A_2 x$$

= ok

Bigettiva (iniettiva è facile: esercizio)

Esibisco l'inversa, cioè data $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ voglio esibire una matrice $[g] \in M_{m \times n}$ t.c.

$$f_{[g]} = g$$

$$\begin{tikzcd} M_{m\times n}(\mathbb{R}) \arrow[rr, bend left, "A \mapsto f_A"] & & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \arrow[ll, bend left, "g \mapsto {[g]}"] \end{tikzcd}$$

voglio dire le due funzioni sono l'una inversa dell'altra.

$(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}) = \mathcal{E}^{(n)}$ base di $\mathbb{R}^n$

Data $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ considero $\underbrace{g(e_i^{(n)})}_{\in \mathbb{R}^m}$ per $i=1,\dots,n$

e posso esprimerlo in coordinate rispetto a $\mathcal{E}^{(m)} = (e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)})$.

$$\boxed{g(e_i^{(n)}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, e_j^{(m)}}$$

Ho trovato $(a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

e la chiamo $[g]$. Faccio le verifiche per vedere che è la matrice "giusta".

. $f_{[g]} = g$ cioè $f_{[g]}(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

scrivo $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, allora ho

$$\left(f_{[g]}(x) \right)_j \overset{?}{=} \left(g(x) \right)_j$$

$$// \qquad\qquad\qquad\qquad ||$$

$$([g]\cdot x)_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, g(e_i)\right)_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, e_j\right)_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\cdot x_i$$

- $[f_A] = A$ infatti se $A = (a_{ji})$

ho $f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, e_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \overset{i}{\boxed{\ }} & \end{pmatrix}}_{A}\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_i} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

conta solo la colonna i-esima (tutte le altre entrate si moltiplicano

$$[f_A] = A$$ per 0) ☒

Es

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

chi è $[g]$?

Base di $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}^{(2)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\qquad\qquad\qquad \underset{e_1}{\shortparallel} \qquad \underset{e_2}{\shortparallel}$$

$$g(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2$$

$$g(e_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5e_1 + 1e_2$$

$$[g] = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[g]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ok}}$$

<u>Corollario</u> Se $\dim V = n$ e $\dim W = m$ allora, scelta una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^m$ l'applicazione

$$\mathcal{L}(V, W) \xrightarrow{g \longmapsto \phi_{\mathcal{C}} \circ g \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ricordiamo $\phi_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{[\cdot]_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n$

$$\phi_\mathcal{C} : W \xrightarrow{[\cdot]_\mathcal{C}} \mathbb{R}^m$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_\mathcal{B}"'] & W \arrow[d, "\phi_\mathcal{C}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, dotted] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

è lineare e bigettiva. In particolare esiste un'applicazione lineare bigettiva tra $\mathcal{L}(V,W)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

<u>MA</u>: l'appl. lineare non è canonica ma dipende

dalla scelta delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Def se $\mathcal{B}$ è base di V $\quad \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

se $\mathcal{C}$ è base di W $\quad \mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$

$g : V \longrightarrow W$ è lineare

chiamo matrice associata a g rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e a $\mathcal{C}$ in arrivo la matrice

$$[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad \text{data} \quad (a_{ji})_{\substack{j=1\dots m \\ i=1\dots n}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

t.c. $\boxed{g(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j}$

Cioè: nelle colonne i-esime di $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ si trovano le coordinate dell'immagine dell'i-esimo elemento di $\mathcal{B}$ (base di partenza) rispetto alla base $\mathcal{C}$.

ES Sia $X = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$g : X \to X$ data da $g(x) = \begin{pmatrix} -5x_1 + 9x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$

(g è la restrizione a X dell'applicazione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 1 \\ 2 & -6 & -7 \\ 1 & -5 & +4 \end{pmatrix}$$

ma per vedere che g è definita come appl. $X \to X$

devo verificare che se $x \in X$ allora $A \cdot x \in X$

cioè se $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e

$A \cdot x = y$ chiedo $y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$$-5x_1 + 2x_2 + x_3 +$$
$$+ 2x_1 - 6x_2 - 7x_3$$
$$+ x_1 - 5x_2 + 4x_3 =$$

$$= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} = 0$$

Considero $B = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} \right)$$

Cerco $[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ che sarà una matrice 2x2

I colonna $\quad g\begin{pmatrix}5\\8\\-13\end{pmatrix} = \dots = \square \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} + \square \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$

II colonna $\quad g\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix} = \dots = \square \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} + \square \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$

Calcolo $\quad g\begin{pmatrix}5\\8\\-13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\8\\-13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}44\\121\\-165\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 44 \\ 121 \\ -165 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{44 + 4 \cdot 121}{2 + 4(-5)} = \frac{-88}{3}$$

$$\beta = \frac{5 \cdot 44 + 2 \cdot 121}{5 \cdot 4 + 2(-1)} = \frac{77}{3}$$

$$[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{88}{3} & \dots \\ \frac{77}{3} & \dots \end{pmatrix}$$

altre entrate con

calcoli analoghi...