Alg. Lin 10/11/2015

$g : V \longrightarrow W$ lineare ; $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ = la matrice che nella j-esima colonna ha le coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ dell'immagine rispetto a g del j-esimo vettore di $\mathcal{B}$ —

Cioè $[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ con $g(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$

OSS nella dim. del Teo ($M_{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ biettiva lineare)
abbiamo visto che

$$[f_A]^{\mathcal{E}^{(m)}}_{\mathcal{E}^{(n)}} = A$$

quindi posso scrivere A invece di f_A

ES $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 7x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

So che $[f_A]^{\mathcal{E}^{(2)}}_{\mathcal{E}^{(2)}} = A$. Invece, se scelgo

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -220/19 & -441/19 \\ 81/19 & 189/19 \end{pmatrix}$$

$$f_A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7\\-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\14\end{pmatrix} = \boxed{\frac{220}{-19}}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \boxed{\frac{81}{19}}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$$

$$f_A\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7\\-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65\\31\end{pmatrix} = \boxed{\frac{441}{-19}}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \boxed{\frac{189}{19}}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$$

Segue da quanto visto (dimostriamo di nuovo):

<u>Teo</u> data $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad$ $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, W) &\longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ g &\longmapsto [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

è lineare e biettiva

($\Rightarrow$ "$\mathcal{L}(V,V)$ è isomorfo come sp. vett.le a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ma <u>non</u> in modo canonico, perché dipende dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ scelte) non serve base

Prop dati $v_1,\dots,v_n$ di V e dati vettori $u_1,\dots,u_n$ di W, $\exists!$ appl lineare $f: V \to W$ t.c. $f(v_i) = u_i$ $i=1,\dots,n$

<u>Cioè</u>: "un'appl. lineare è definita dai suoi valori su una base del dominio, tali valori si possono scegliere a piacere"

DIM (Prop) dato $v \in V$ so che esiste unico $x = [v]_B \in \mathbb{R}^n$ ($B = \{v_1, \dots, v_n\}$) t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Se f esiste lineare con $f(v_i) = u_i \ \forall i$, allora devo avere che

$$f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

(per linearità di f)

dunque f così data è unica. Viceversa, posso porre $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$: siccome x è univocamente associato a v ho definito $f: V \longrightarrow W$

Resta da vedere che f è lineare:

se prendo $v, v' \in V$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ho

se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ e $[v']_{\mathcal{B}} = x'$ so già

$$[\lambda v + \lambda' v']_{\mathcal{B}} = x + x' \implies$$

$$\implies f(\lambda v + \lambda' v') = (\lambda x_1 + \lambda' x_1') u_1 + \dots + (\lambda x_n + \lambda' x_n') u_n$$

$$= \lambda (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) + \lambda' (x_1' u_1 + \dots + x_n' u_n) =$$

$$= \lambda f(v) + \lambda' f(v')$$

$\boxtimes$

ES $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^2$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

allora esiste una e una sola $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ad esempio

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = f\left(\boxed{3/5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \boxed{- \frac{7}{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 3/5 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - 7/5 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 29 \\ 46 \\ -58 \end{pmatrix}$$

<u>ES</u> $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

ma **non** è base $\quad (v_1+v_2=v_3 \quad , \quad v_1+v_2-v_3=0)$

- Quante sono le $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineari con

$$f(v_1)=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}, \quad f(v_2)=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} \quad f(v_3)=\begin{pmatrix}-1\\\pi\end{pmatrix} \quad ?$$

Nessuna $\quad \begin{pmatrix}-1\\\pi\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$

- Quante $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineari con

$$f(v_1)=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} \quad f(v_2)=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} \quad \underbrace{f(v_3)=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}}_{\text{inutile}} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} = f(v_1)+f(v_2) = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$$

$v_1+v_2=v_3$

Sto assegnando f solo su v_1 e v_2 ; se completo v_1, v_2 a base (v_1, v_2, v) di $\mathbb{R}^3$ allora per qualsiasi scelta di $u \in \mathbb{R}^2$ esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare con

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad f(v) = u$$

Morale: ci sono infinite f –

<u>Teo</u> $\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$g \longmapsto [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$ lineare e bigettiva

DIM linearità $\quad g, h \in \mathcal{L}(V, W) \quad [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = A \; , \; [h]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = B$

$$\Rightarrow g(v_j) = \sum a_{ij} w_i \quad , \quad h(v_j) = \sum b_{ij} w_i$$

$$\Rightarrow (\lambda g + \mu h)(v_j) = \sum \underbrace{(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})}_{[\lambda A + \mu B]_{ij}} w_i$$

$$\Rightarrow [\lambda g + \mu h]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \lambda A + \mu B$$

Esibisco l'inversa della matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$:

associo ad A l'unica $g \in \mathcal{L}(V, W)$ (Prop)

t.c. $\quad g(v_j) = \underbrace{\sum a_{ij} w_i}_{u_j}$

Prop $f: V \to W$ lin., $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W

$$\Longrightarrow [f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

Cioè "la matrice di f agisce sulle coordinate come l'app. lin. f agisce sui vettori"

DIM $[v]_{\mathcal{B}} = x$, cioè $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$ significa $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Allora

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{(A \cdot X)_i} w_i \implies [f(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot X$$

(*)

Q. Cosa succede se cambiamo $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$?
come cambiano $[v]_{\mathcal{B}}$, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$?

Ricordiamo : $f : X \to Y$ è invertibile se esiste $g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$
quindi chiamo g l'inversa di f e lo indico

con f^{-1} (Facile: se g esiste è anche unico)

Fatto: f invertibile $\Leftrightarrow$ f è bigettiva

OSS se ho $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ allora

- se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva

$$\left(z = (g \circ f)(x) \Rightarrow z = g(f(x)) \right)$$

- se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva (se non lo fosse $f(x_1) = f(x_2)$ per $x_1 \neq x_2$

ma allora $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad x_1 \neq x_2$)

OSS Se ho $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

e $g \circ f = Id_X$ allora g è surg. e f è iniettiva

Attenzione Sapendo che $g \circ f = Id_X$ NON si conclude

che f è invertibile e $g = f^{-1}$:

ES $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f(n) = n+1$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad g(n) = \begin{cases} 1997 & \text{se } n = 0 \\ n-1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$(g \circ f)(n) = n$ ma f non è surg ($0 \notin Im\, f$)

e g non è iniettiva $\left(g(0) = g(198) \right)$

"Mezza invertibilità $\not\Rightarrow$ l'altra mezza"

Invece, già visto:

- $f: V \to W$ lineare <u>può</u> essere invertibile solo se $\dim V = \dim W$
- <u>Se</u> $\dim V = \dim W$ e $f: V \to W$ lineare mezza invertibilità $\Rightarrow$ l'altra mezza in particolare se $g: W \to V$ è lin $g \circ f = Id_V$ allora f è invertibile e $g = f^{-1}$

Fatto • $f: V \to W$ lineare può essere invertibile solo se $\dim V = \dim W$

• se $\dim V = \dim W$, f iniettiva $\Longleftrightarrow$ f surgettiva.

Def $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrice identità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss $A \in M_{m \times n} \Longrightarrow A \cdot I_n = A$

$$
i\begin{pmatrix} a_{i1} \cdots\cdots a_{ij} \cdots\cdots a_{in} \end{pmatrix}
\underbrace{\begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & 1 & ---- \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} j}_{I_n}
=
\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & & \end{pmatrix} i \end{array}
$$

Analogamente $B \in M_{n\times k} \implies I_n \cdot B = B$

In particolare alla matrice $I_n \in M_{n\times n}$ è associata l'applicazione

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
x &\longmapsto I_n \cdot x = x
\end{aligned}
\qquad \text{cioè } \underline{Id_{\mathbb{R}^n}}
$$