Alg. Lin. 20.10.2015

Lemma (v_1, v_2) sono lin. dip. $\Longleftrightarrow$ uno dei due è multiplo dell'altro

(comprende il caso in cui uno dei due è nullo)

DIM $\Longleftarrow$ $v_2 = \alpha \cdot v_1$ oppure $v_1 = \alpha \cdot v_2$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\alpha v_1 - v_2 = 0$ $\qquad$ $v_1 - \alpha v_2 = 0$

combin lineare non nulla che ha risultato 0.

$\Rightarrow$ $\exists$ α_1, α_2 non entrambi nulli t.c.

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 = 0$$

se $\alpha_1 \neq 0$ $\quad v_1 = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2$

se $\alpha_2 \neq 0$ $\quad v_2 = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) v_1$

Def $(v_1, \dots, v_n)$ insieme finito e ordinato di vettori di V si dice **base** di V se:

- $v_1, \dots, v_n$ generano V; ovvero $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$
- $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip.

<u>Cioè</u> $(v_1, \dots, v_n)$ è <u>base</u> di V se <u>ogni</u> $v \in V$ ← perchè generano

si scrive <u>in uno e un solo modo</u> come

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$ ↖ perchè lin. indip.

<u>Ordinata</u> : l'ordine conta, ad es.

$$(v_1, v_2, v_3) \neq (v_3, v_1, v_2)$$

Se posso scrivere ogni $v \in V$ come

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Def chiamo vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ il vettore

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Es in $\mathbb{R}^n$ ho una base canonica

$$\mathcal{E}_n = \left(\underset{e_1^{(n)}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{e_2^{(n)}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}, \dots, \underset{e_n^{(n)}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right)$$

(posso scrivere e_i invece di $e_i^{(n)}$ se è chiaro chi è n)

E' una base:

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boxed{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \boxed{x_n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{E}_n} = x$$

(rispetto alla base canonica le coordinate di x sono le sue componenti)

<u>ES</u> $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \left(\underset{v}{\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}} \right)$ sono una base:

devo mostrare che $\forall\, x \in \mathbb{R}^2 \;\; \exists!\; \alpha, \beta$ t.c.

$$x = \alpha v + \beta w$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$ cioè

$$\begin{cases} \underline{5}\,\alpha + \underline{7}\,\beta = x_1 \\ \underline{13}\,\alpha - \underline{3}\,\beta = x_2 \end{cases}$$ ha unica soluzione

* $\underline{3}\,\mathrm{I} + \underline{7}\,\mathrm{II}$

$\underline{13}\,\mathrm{I} - \underline{5}\,\mathrm{II}$

$$\begin{cases} 106\,\alpha = 3x_1 + 7x_2 \\ 106\,\beta = 13x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{3x_1 + 7x_2}{106} \\ \beta &= \frac{13x_1 - 5x_2}{106} \end{aligned}}$$

ho ! soluzione $\Rightarrow$ è base

Inoltre $$[x]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{106}\begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 \\ 13x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$$

ES $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ base canonica

$$\mathcal{E}_{m \times n} = (E_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n}$$

dove E_{ij} ha coeff. 1 nel posto (i,j) e 0 altrove

ES $$\mathcal{E}_{3 \times 2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$E_{11} \quad E_{12} \quad E_{21} \quad E_{22} \quad E_{31} \quad E_{32}$

è chiaro che è una base di $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$[A]_{\mathcal{E}_{m \times n}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}} \qquad (A)_{ij} = a_{ij}$$

<u>OSS</u> $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$(e_j)_i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Def</u> Se x, y sono due oggetti

diciamo che δ_{xy} (funzione di Kronecker) KRONECKER :

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

$$(e_j)_i = \delta_{ij}$$

$$(E_{ij})_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h, \ j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(E_{ij})_{hk} = \delta_{ih} \, \delta_{jk}$$

ES $\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] \quad \deg p(t) \leq d \}$

Base canonica : $\{ 1, t, t^2, \dots, t^d \} = \mathcal{B}$

$p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] \qquad p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_d t^d$

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

OSS non tutti gli spazi vettoriali hanno una base.

Prop $\mathbb{R}[t]$ non ammette nessun insieme finito di generatori e quindi non ha una base.

Dim. per assurdo.

$$\mathbb{R}[t] = \operatorname{Span}(p_1(t), \dots, p_k(t))$$

(Es Se fosse $\mathbb{R}[t] = \operatorname{Span}(\sqrt{3}-e,\ t+t^2,\ 9-t^2+t^3,\ 7+t^3)$

allora vorrebbe dire che ogni $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ si scrive

come $\alpha \cdot (\sqrt{3}-e) + \beta(t+t^2) + \gamma(3-t^2+t^3) + \delta(7+t^3)$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

questo non è possibile se $\deg p(t) \geq 10$)

In generale $d_k = \deg(p_k(t))$. Se prendo $d \in \mathbb{N}$ tale che $d > \max\{d_1, \dots, d_k\}$

$\Rightarrow t^d \notin \mathrm{Span}(p_1(t), \dots, p_k(t))$. Assurdo. $\boxtimes$

<u>Teo</u> Se V ammette basi, due qualsiasi basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

<u>ES</u> $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{E}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}\right)$

due elementi

ES $\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ non può essere base di $\mathbb{R}^2$

$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ e \end{pmatrix} \right)$ "

Prop Se $v_1, \dots, v_h$ lin. indip. e

$v_1, \dots, v_h \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_K) \Rightarrow h \leq K$.

"Nel generato di K vettori c'è spazio per al più K vettori lin indipendenti"

Deduciamo il teorema dalla prop.:

Supponiamo di avere due basi di V:

$\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m)$

$$\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{lin. indip. per la prima proprietà della def. di base } \mathcal{B}} \in \underbrace{V = \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_m)}_{\text{per la seconda prop. di base di } \mathcal{C}}$$

$\overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow}$ $n \le m$. Scambiando i ruoli di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ ottengo $m \le n$ $\Longrightarrow$ $n = m$ $\blacksquare$

Grazie al teorema posso definire la <u>dimensione</u> di V

Def $\dim_{\mathbb{R}}(V) =$ numero di elementi di una base, se esiste

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = +\infty$ se V non ha basi.

Prop Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V ho

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \boxed{\phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}}$$

è bigettiva e rispetta le operazioni di sp. vett.:

$$\phi_{\mathcal{B}}(0) = 0, \quad \phi_{\mathcal{B}}(v+w) = \phi_{\mathcal{B}}(v) + \phi_{\mathcal{B}}(w), \quad \phi_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda\, \phi_{\mathcal{B}}(v)$$

(Cioè "tramite ϕ_B si identifica con $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale")

DIM ϕ_B iniettiva

$$\phi_B(v) = \phi_B(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [w]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \Rightarrow$$

$v = w$ ok, ϕ_B è iniettiva

el. di base B

ϕ_B è suriettiva

sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, posto $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

ho $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_B(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

ok ϕ_B è suriettiva.

$\phi_B(0) = 0$ significa

$[0]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e infatti $0 = 0v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$

$\phi_B(v + w) = \phi_B(v) + \phi_B(w)$:

chiamo $x = \phi_B(v)$, $y = \phi_B(w)$

devo vedere

$$\phi_B(v+w) = x+y$$

$$x = \phi_B(v) \Rightarrow [v]_B = x \Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$$

$$y = \phi_B(w) \Rightarrow [w]_B = y \Rightarrow w = y_1 \cdot v_1 + \dots + y_n \cdot v_n$$

$+$

$$v+w = (x_1+y_1)v_1 + \dots + (x_n+y_n)v_n$$

$$[v+w]_B = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = x+y \Rightarrow \phi_B(v+w) = x+y$$

$\phi_B(\lambda v) = \lambda \phi_B(v)$ è simile alla dim precedente

<u>Con</u> Se V, W due sp vettoriali e $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) < +\infty$

$\Rightarrow \exists f : V \to W$ bigettiva e rispetta le operazioni:

$$f(0_V) = 0_W$$

$$f(v_1 \underline{+_V} v_2) = f(v_1) \underline{+_W} f(v_2)$$

$$f(\lambda \underline{\cdot_V} v) = \lambda \underline{\cdot_W} f(v)$$

<u>Dunque</u> "W e V sono uguali tra loro come spazi vettoriali se hanno la stessa dimensione".

Dim prendo $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

prendo $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ base di W

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f = \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & & W \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\
& \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$