3/3/16

V sp. vett. su $\mathbb{R}$; $f: V \times V \to \mathbb{R}$ è

- bilineare se lin a sin e dx
- simm. se $f(x,y) = f(y,x) \; \forall x,y$
- def. pos. se $f(x,x) \geq 0 \; \forall x$, nullo solo per $x=0$
- prod. scal. se bil. simm. def. pos.

Dato $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ poniamo

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle x | y \rangle_A = {}^t y \cdot A \cdot x$$

(se $A = I_n$ viene prod. scal. standard di $\mathbb{R}^n$).

<u>Fatti</u>:

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è sempre bilineare
- tutte le bilineari $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è simmetrica $\Leftrightarrow$ A simm.

Q: per quali A simm. la $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è def. pos.?

Risposte parziali:

- Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, è def. pos. $\Longleftrightarrow$ ogni $\lambda_i > 0$

Infatti:
$$ {}^t x \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} x = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} $$
$$ = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \qquad [\dots] $$

- Se $A = {}^t M \cdot M$ con $\det(M) \neq 0$ allora è def. pos.:

$$\langle x | x \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot x = {}^t x \cdot {}^t M \cdot M \cdot x$$

$$= {}^t(M \cdot x) \cdot (M \cdot x) = \langle M \cdot x | M \cdot x \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Sempre ≥ 0 ; nullo solo per $M \cdot x = 0$, ovvero $x = 0$.

- Prop: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è def. pos.

$\Longleftrightarrow$ $a > 0$, $\det A > 0$.

Dim: $\underbrace{\Longrightarrow}$ • $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A > 0$

$$(1 \quad 0) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a > 0$$

• $\left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$(t \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(t \;\; 1) \begin{pmatrix} ta + b \\ tb + c \end{pmatrix} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot t^2 + 2b \cdot t + c > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \Delta/4 < 0 \Longrightarrow \underbrace{b^2 - ac}_{-\det(A)} < 0$$

$\underbrace{\Longleftarrow}$ • $a > 0 \Longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A = ax^2 > 0 \quad \forall x \neq 0;$

- $$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_A = ax^2 + 2bxy + cy^2$$ se $y \neq 0$ pongo $t = x/y$

$$= \underbrace{y^2}_{\geq 0} \cdot \left(\underbrace{at^2 + 2bt + c}_{\geq 0} \right)$$ (come sopra) $\square$

<u>Oss</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A = \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

$$= ax^2 + dy^2 + gz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz$$

Es: $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A = 7x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 4xy + 9xz - 16yz$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9/2 \\ 2 & 5 & -8 \\ 9/2 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

- $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix}$

Perché A sia def. pos. è necessario che lo sia su tutti i vettori del tipo:

$$* \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix} \Rightarrow a > 0,\ ad - b^2 > 0$$

$$* \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix} \Rightarrow a > 0, \; ag - c^2 > 0$$

$$* \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix} \Rightarrow d > 0, \; dg - e^2 > 0.$$

(e ho anche $g > 0$).

Dunque: condizione nec. perché $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{pmatrix}$ sia def pos è

$$a, d, g > 0, \quad ad - b^2 > 0, \quad ag - c^2 > 0, \quad dg - e^2 > 0.$$

Es: non sono sufficienti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2>0 \quad 1>0 \quad 5>0$

$2\cdot 1 - 1^2 > 0$

$2\cdot 5 - 3^2 > 0$

$1\cdot 5 - 2^2 > 0$

però $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ non è def. pos.

Es:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Vogliamo: $10 - \lambda^2 > 0$

$\Rightarrow |\lambda| < \sqrt{10}$

Calcolo $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A$

$$= \underline{2} + \underline{1} + 5z^2 + \underline{2} + 2\lambda z + 4z = 5z^2 + 2(\lambda+2)z + 5$$

Voglio che assuma valori neg, cioè $\Delta > 0$

$$\Delta/4 = (\lambda+2)^2 - 25 > 0$$

$$|\lambda+2| > 5$$

Prendendo $3 < \lambda < \sqrt{10}$ la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ non è def pos.

Es: Consideriamo:

$$q(x,y,z) = (x-2y)^2 + (3x-y+z)^2 + 7(y-2z)^2$$

Ovvio: $q(x,y,z) \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Inoltre: $q(x,y,z) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = 4z \\ 12z - 2z + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque q è def. pos. ; $q(x,y,z) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A$;

$$q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 4xy$$
$$+ 9x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 6xz - 2yz$$
$$+ 7y^2 + 28z^2 - 28yz$$

dunque $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -5 & 12 & -15 \\ 3 & -15 & 28 \end{pmatrix}$ è def. pos.

<u>Viceversa</u>: se data $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ riesco a scrivere $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A$ come

somma di quadrati di funz. lin. di x, y, z molt. per numeri positivi: posso concludere (di solito) che A è def. pos.

Es: $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$

$=$ funzioni continue su $[0,1]$ a valori reali.

Considero $\langle u | v \rangle = \int_0^1 u(t) \cdot v(t) \cdot dt$.

E' un prod. scal.

Fino alla fine di oggi: V sp. vett su $\mathbb{R}$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scal. su V.

Def: chiamo norma associata a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ la

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\| v \| = \sqrt{\langle v | v \rangle} \quad \text{(l'unica radice} \geq 0\text{)}.$$

Oss: $\| v + w \|^2 = \langle v + w | v + w \rangle$

$= \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle$

$= \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle$

$\|v\|^2$ uguali $\|w\|^2$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$

$$\Longrightarrow \langle v|w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

$\Longrightarrow$ conoscendo $\|\cdot\|$ conosco $\langle \cdot|\cdot\rangle$

(sarà falso su $\mathbb{C}$)

Proprietà: • $\|v\| \geq 0 \quad \forall v$,

$\|v\| = 0$ solo per $v = 0$

• $\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v|\lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v|v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$

Prop (disuguaglianza di Cauchy-Schwartz):

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

e vale l'= se e solo se v, w sono multipli.

Dim: Se $w = \lambda \cdot v$

$$|\langle v|w\rangle| = |\langle v|\lambda v\rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 \quad \checkmark$$

Se non sono multipli ho $t \cdot v + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \| tv + w \|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 \cdot t^2 + 2 \langle v | w \rangle \cdot t + \|w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta/4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v | w \rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle v | w \rangle^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \quad | \langle v | w \rangle | < \|v\| \cdot \|w\| .$$

$\boxtimes$

Cor (disuguaglianza triangolare):

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

e l'= vale se e solo se uno è multiplo dell'altro con scalare ≥ 0.

Dim: caso multipli fra loro: facile. Se no:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$

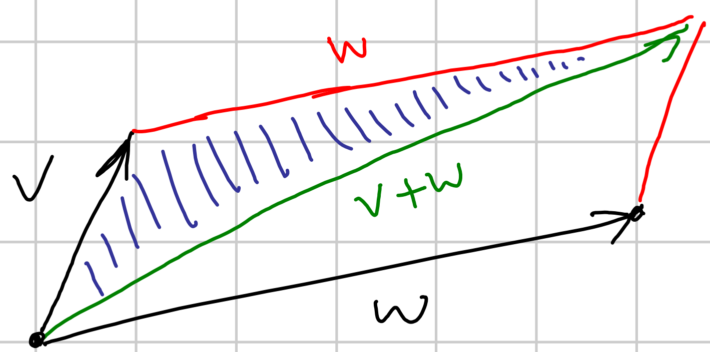
$$\underset{C-S}{<} \|v\|^2 + 2\cdot\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \quad \blacksquare$$

Oss: Nel caso $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ standard

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

= lunghezza del vettore x calcolata con Pitagora.

Grazie alla disug. triang. possiamo in $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ considerare $\|\cdot\|$ come misura di lunghezza;



$\| v+w \| \leq \|v\| + \|w\|$ significa che in un triangolo ogni lato è lungo al più come la somma degli altri due.

Def: chiamo <u>distanza</u> associata a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ la

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da $d(v,w) = \| v - w \|$.

Proprietà:

- $d(v,w) \geq 0$; $d(v,w) = 0$ solo per $w = v$
- $d(v,w) = d(w,v)$
- $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w)$

disuguaglianza triangolare

(l' = vale solo se $z = t \cdot v + (1-t) \cdot w$

$0 \leq t \leq 1$

— cioè z sta sul segmento che unisce v e w)

Infatti: • $d(v,w) = \|v-w\| \geq 0$; $=$ sse ...

• $d(w,v) = \|w-v\| = \|-(v-w)\| = \|v-w\| = d(v,w)$

• $d(v,w) = \|v-w\| = \|(v-z)+(z-w)\|$

$\leq \|v-z\| + \|z-w\| = d(v,z) + d(z,w)$

Def. $v \in V$ è unitario se $\|v\| = 1$.

v, w sono ortogonali ($v \perp w$) se $\langle v | w \rangle = 0$

(per $\mathbb{R}^n$: solita nozione di angolo $90°$)

$v_1, \dots, v_k$ sistema ortogonale se $\langle v_i | v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$

$v_1, \dots, v_k$ sistema ortonormale se è ortogonale e ogni v_i è unitario.

Es: In $\mathbb{R}^3$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sono sistema ortogonale:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 8+7-15=0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 38-13-25=0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 76-91+15=0$$

Def: dato $v \neq 0$ chiamo normalizzazione la sostituzione di v con $\frac{v}{\|v\|} = w$

(si ha $\|w\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$).

Es: $\frac{1}{\sqrt{4+1+25}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{16+49+9}} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{\sqrt{19^2+13^2+5^2}} \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

è sistema ortonormale.

Prop: un sistema di vettori ortogonali non nulli è lin. indipendente.

Dim: Siano $v_1, \dots, v_k$.

Ipotesi: $\langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

$v_i \neq 0 \quad \forall i$.

Prendiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$:

$\forall i$ ho:

$$0 = \langle 0 | v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k | v_i \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle v_1 | v_i \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_k | v_i \rangle$$

$$= \lambda_i \cdot \|v_i\|^2 \implies \lambda_i = 0 \text{ poiché } \|v_i\| \neq 0. \ \blacksquare$$

Prop: se $v_1, \dots, v_n$ è base ortogonale di V allora

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\| v_i \|^2}}_{} \cdot v_i .$$

è la i-esima coordinata di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$ -

Conseguenze:

(1) per calcolare le coordinate di un vettore risp. a base ortog. basta un calcolo (no soluz. di un sistema)

(2) la i-esima coordinata di un vett. dipende solo da v_i (falso senza ipotesi di base ortogonale).

Lem: se w è ortogonale a tutti i vettori di una base ortogonale $v_1, \dots, v_n$ allora è nullo.

Dim: Siccome $v_1, \dots, v_n$ è base ho $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Ora $\forall i$ ho $0 = \langle w | v_i \rangle$

$$= \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_i \rangle$$

$$= \alpha_i \cdot \|v_i\|^2 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

(poiché $\|v_i\| \neq 0$)

$\Rightarrow w = 0$ _ $\blacksquare$

<u>Dim</u> (Prop) : devo provare che $w = v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$ è nullo; grazie al lemma basta provare che $\langle w | v_j \rangle = 0 \quad \forall j$.

Infatti:

$$\langle w | v_j \rangle = \left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \;\middle|\; v_j \right\rangle$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot \langle v_i | v_j \rangle$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \frac{\langle v | v_j \rangle}{\cancel{\| v_j \|^2}} \cdot \cancel{\langle v_j | v_j \rangle} = 0. \qquad \blacksquare$$