# Geometria 5/4/18

$f : V \to V$ cerchiamo $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia facile (diagonale).

$\lambda$ autoval se $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\lambda$ autoval $\iff p_f(\lambda) = 0$ $\quad p_f(t) = \det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$.

Se $p_f(t)$ ha $n$ radici distinte in $\mathbb{K} \Rightarrow f$ diago.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -7 \\ 0 & t-1 & -19 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} = (t-1)^2 \cdot (t-2).$$

Def: se $\lambda$ è autoval. di $f$ chiamo:

molteplicità algebrica la sua molt. come radice

molteplicità geometrica $\dim(\ker(\lambda \cdot id_V - f))$ del pol car.

$\{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$

autospazio rel. a $\lambda$

(= l'insieme di tutti gli autovettori)

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = (t-1)^2(t-2)$

autoval:

$\lambda_1 = 1$ molt. alg. $= 2$

molt. geom $= \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3-2=1$

$\lambda_2 = 2$ molt. alg $= 1$

molt. geom $= \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-2=1$

**Teo**: $f: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

$P_f(t)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e ciascuna ha

molt. geom = molt. alg.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

non è diag. perché $m.g.(1) < m.a.(1)$

Prop: si ha sempre $1 \le m.g.(\lambda) \le m.a.(\lambda)$

Dimo(Prop): se $k = m.g.(\lambda) = \dim\{v : f(v) = \lambda v\}$

prendo base $v_1, \dots, v_k$ di $\{v : f(v) = \lambda \cdot v\}$ e la completo a $\mathcal{B}$ di $V$:

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \vdots & * \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \vdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & M \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \Big\}^{k}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}$$

$$\Rightarrow p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = \det\begin{pmatrix} (t-\lambda) I_k & * \\ 0 & t \cdot I_{n-k} - M \end{pmatrix}$$

$$= (t-\lambda)^k \cdot p_M(t) \Rightarrow m.e(\lambda) \geq k$$

∎

**Esercizio:** $\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k \\ = \\ \} h \end{matrix} = \det(A) \cdot \det(C)$

$\quad\quad\quad

e ognuno ha $m.g = m.a.$

Infatti: $\exists \mathcal{B}$ t.c.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & \cdots & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \} m_1 \\ \} m_2 \end{matrix} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \cdots$$

$$\Rightarrow p_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} (t-\lambda_2)^{m_2} \cdots \quad m_j = m.a.(\lambda_j)$$

$$m.g.(\lambda_1) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1-\lambda_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \} m_1$$

$$= m_1 \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_1-\lambda_2 & & \\ & & \lambda_1-\lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ogni radice di $p_f(t)$ in $K$ + $m \cdot g = m \cdot a$ per ognuno

$\Rightarrow$ diago

(analogo al caso degli autoval. distinti)

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le radici di $p_f(t)$ con $m.a.(\lambda_j) = m_j$ ho

- $m_1 + \dots + m_k = n$
- $\dim(\{v : f(v) = \lambda_j \cdot v\}) = m_j$

Allora prendendo basi di ciascun autospazio ho $m_1 + \dots + m_k = n$ vettori: basta ora vedere che sono lin. indip. "$\square$"

Ricetta per vedere se $f: V \to V$ o $A \in M_{M \times M}$ è diagonalizzabile:

- se ho $f$ scelgo $\mathcal{B}$ a caso e calcolo $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
- calcolo $P_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$
- cerco le radici di $P_A(t)$

- Se sono in $\mathbb{R}$ e qualche radice non è in $\mathbb{R}$, **NO**

- altrimenti considero le molt. alg. delle radici
  - se sono tutte 1 **SI**
  - per quelle con m.a. > 1 calcolo la m.g
    se sempre m.g = m.a **SI**

se qualche $m.g < m.a$ NO

Ese: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}h \end{matrix} = \det(A) \cdot \det(C)$.

$k$ $h$

Per induzione su $k$ _

$k = 1$ sviluppo lungo I col ✓

Sia vero per $k-1$, lo provo per $k$: sviluppo

Lungo I col:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{1+j} a_{j1} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} A^{j1} & B^{j} \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{\det(A^{j1}) \cdot \det(C)}$$

(ipotesi induttiva)

$$= \left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{1+j} a_{j1} \det(A^{j1}) \right) \cdot \det(C)$$

$\det(A)$.

Esempio: $\det\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ \hline -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) = \dots$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

# Teorema spettrale reale

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$;

$A$ simmetrica $\Longleftrightarrow$ si diagonalizza tramite una matrice ortogonale

cioè: $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c.

$M^{-1} = {}^tM$ e $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

cioè: $A$ ammette una base ortonormale di autovettori

(le colonne di M)

"spettro" i colori nei quali uno spettro (prisma) scompone la luce bianca sono gli autovalori di un opportuno operatore

Dimo: $\Leftarrow$ (facile e poco interessante)

Se $\exists M$ t.c. $M^{-1} = {}^tM$ e $M^{-1} \cdot A \cdot M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

ho $A = M \cdot D \cdot M^{-1} = M \cdot D \cdot {}^tM$

$${}^tA = {}^t({}^tM) \cdot {}^tD \cdot {}^tM = M \cdot D \cdot {}^tM$$ ✓

$\Longrightarrow$ Per induzione su $n$.

$n = 1$ : sempre diagonale ($\Rightarrow$ sia diagonalizzabile sia simmetrico)

Supponiamolo vero per $n-1$ e $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica.

Passo 1: provo che le radici $p_A(t)$ sono reali.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice $\Rightarrow$ è un autoval di $A$ vista come elem. di $M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ t.c. $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Calcolo

$$\langle A\cdot v \mid v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda \cdot v \mid v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \cdot \|v\|^n_{\mathbb{C}}$$

$$\| \quad\quad\quad\

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

**Passo 2** – conclusione. Prendo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ radice di $p_A(t)$ e $v_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ e $\|v_1\| = 1$. Completo $v_1$ a base $M = (v_1, \dots, v_n)$ ortonormale (cioè $M$ ortogonale: $M^{-1} = {}^tM$):

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & w \\ \hline 0 \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

$w \in \mathcal{M}_{1 \times (n-1)}$

$B \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}$

$$
\begin{array}{c}
\| \\
{}^{t}M \cdot A \cdot M \\
\| \\
{}^{t}M \cdot A \cdot M
\end{array}
$$

Τώρα:

$$
{}^{t}M \cdot {}^{t}A \cdot {}^{t}({}^{t}M) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline {}^{t}W & {}^{t}B \end{array}\right)
$$

$$
\Rightarrow W = 0 \,, \quad {}^{t}B = B
$$

Trovato $M$ ortog. t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad B \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)} \text{ simmetrica}$$

$$\Rightarrow \exists N \text{ t.c. } N^{-1} = {}^tN \text{ e } N^{-1} \cdot B \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}}_{X^{-1}} \cdot M^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$X^{-1} = {}^t X$ . ∎

Metodo alternativo per vedere che $A \in M_{n\times n}$ simm ha almeno un autoval. reale:

Prop: la funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\langle Ax | x\rangle}{\|x\|^2}$ con $A$ simmetrica ammette max e min ed essi sono autoval. di $A$ e i punti in cui sono assunti sono i relativi

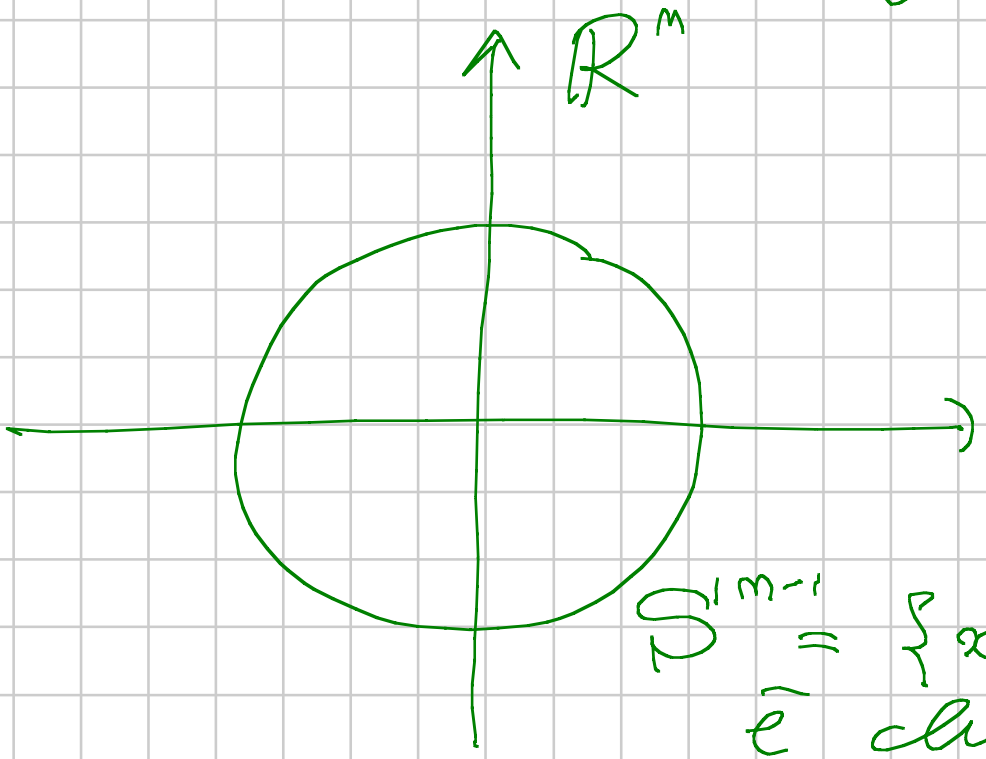
autovettori.

**Dimo:** fatto: una funz. continua su un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ ha max/min

FATTO: vero anche in $\mathbb{R}^n$: una funzione continua su $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato ha max/min

**Oss:** per $f(x) = \dfrac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2}$ i valori

su ogni retta sono uguali:




$$f(k\cdot x) = \frac{\langle A\cdot kx \mid kx\rangle}{\|kx\|^2} = \frac{k^2\langle Ax\mid x\rangle}{k^2\|x\|^2} = f(x)$$

$S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$
è chiuso e limitato

$\Rightarrow$ i valori assunti da $f$ sono quelli

assunti su $S^{n-1}$ e $\neq 1$ è quoziente di polinomi

dunque è continua $\Rightarrow$ $f$ ha max e min.

Fuori: ok anche senza simmetria.

Sia $m$ il max o min assunto in $x$:

provo che $A \cdot x = m \cdot x$. So che $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \forall k$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\right) \cdot \|x\|^2 - \langle Ax | x \rangle \cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

$$= \frac{2(A \cdot x)_k \cdot \|x\|^2 - \langle Ax | x \rangle \cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

è nullo $(Ax)_k = \underbrace{\frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|}}_{m} \cdot x_k$

$\Rightarrow A \cdot x = m \cdot x$.