Geometrie 18/4/18

Visto: le isom. di $\mathbb{R}^n$ sono affini

Cor: le isom di $\mathbb{R}^2$ sono

- rotaz o traslaz (= traslaz o rotaz)
- rifl. risp. a retta o traslaz. (traslaz o rifl)

Dim: sappiamo che $g(x) = A \cdot x + v = (T_v \circ A)(x)$

A 2x2 ortog $\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{rotaz}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rifl}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotaz angolo } \pi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rotaz angolo } 0.$$

$\blacksquare$

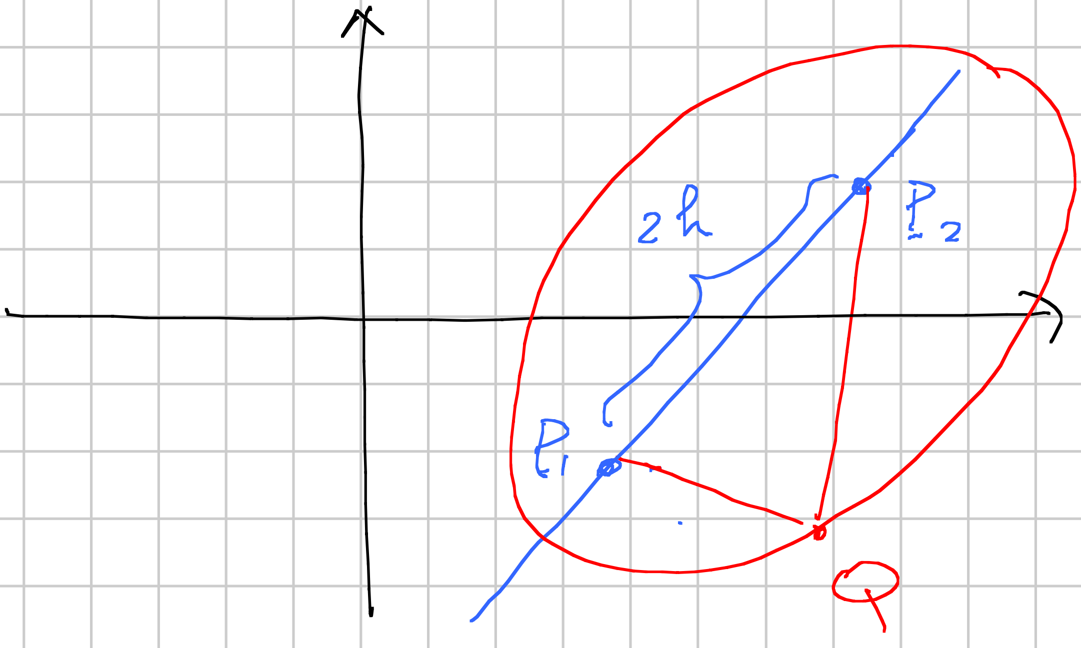
CONICHE

Descrizione metrica

Ellisse : dati $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{E} = \{ Q \in \mathbb{R}^2 : d(P_1, Q) + d(P_2, Q) = 2k \}$$

($P_1 = P_2$ circonferenza).



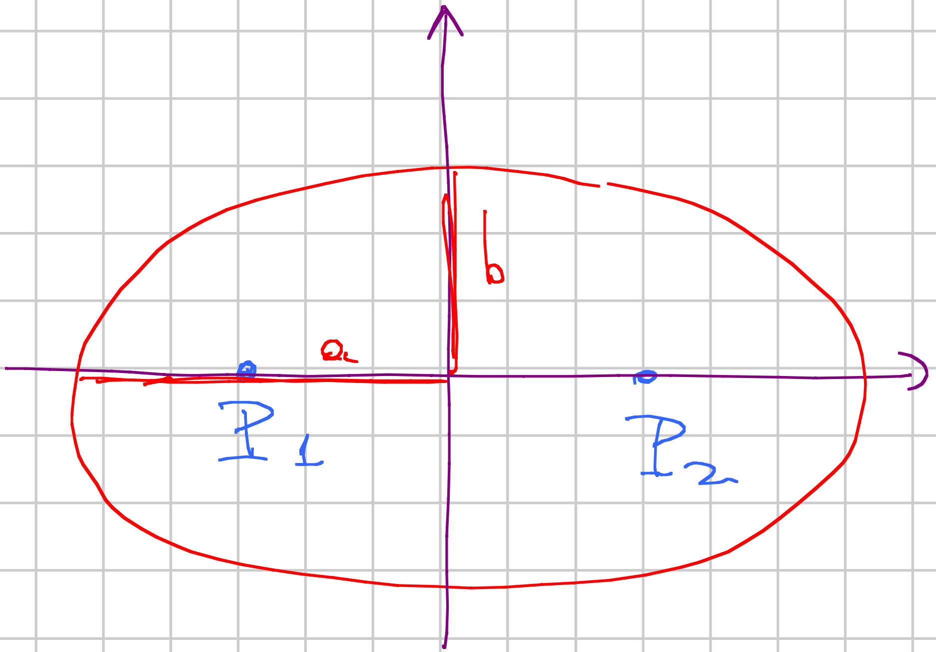
$2k > 2h$

(Se $2k = 2h$ viene $[P_1, P_2]$)

Equazione canonica metrica:

- traslo il pto medio di $[P_1, P_2]$ in O

- ruoto intorno a O finché $P_1=(-h,0)$, $P_2=(h,0)$



$Q=(x,y)\in\mathcal{E}$ se

$$\sqrt{(x+h)^2+y^2}+\sqrt{(x-h)^2+y^2}=2k$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{(x-h)^2+y^2}=2k-\sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{x^2}-2hx+\cancel{h^2}+\cancel{y^2}=4k^2-4k\sqrt{(x+h)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2hx+\cancel{h^2}+\cancel{y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\pm \cancel{4}k\sqrt{(x+h)^2+y^2} = \cancel{4}hx+\cancel{4}k^2$$

$$\Downarrow$$

$$k^2x^2+\cancel{2k^2hx}+k^2h^2+k^2y^2 = h^2x^2+\cancel{2k^2hx}+k^4$$

$$\Downarrow$$

$$(k^2-h^2)x^2+k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-h^2}=1$$

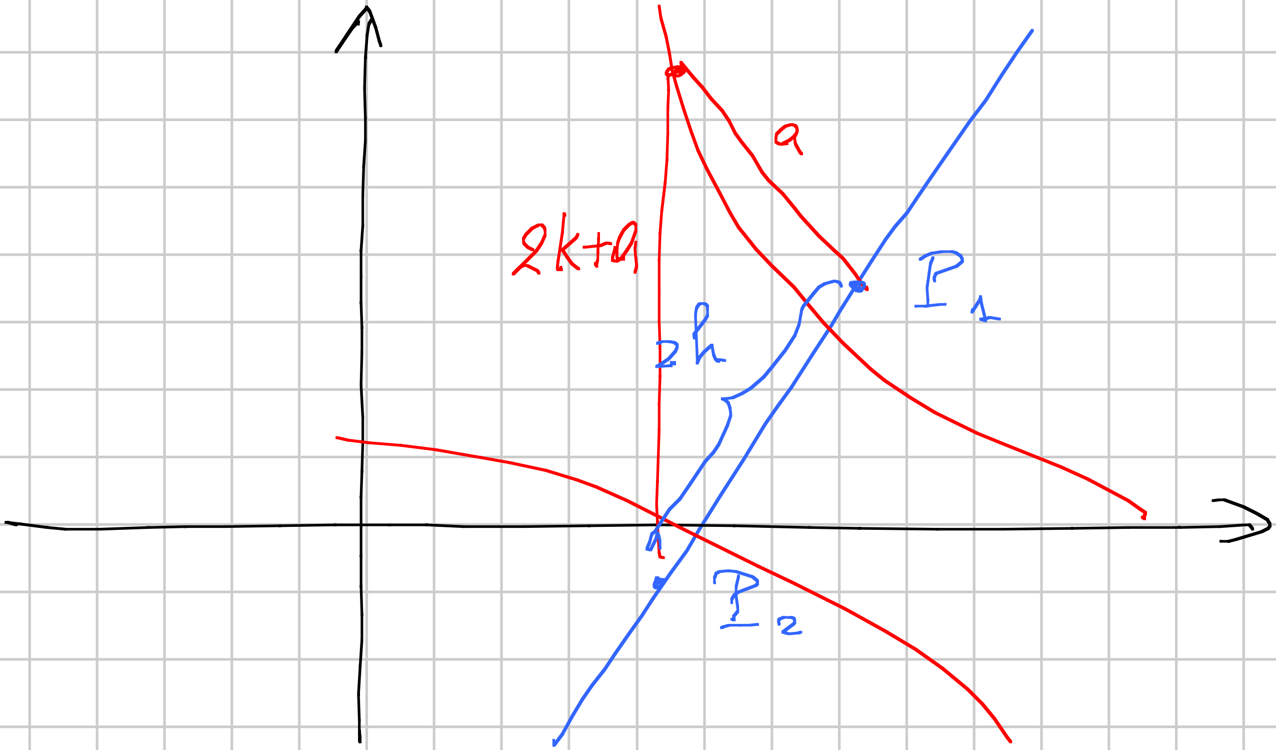
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a>b>0}$$

Equaz. canonica metrica dell'ellisse.

(Fatto: se Q soddisfa l'equazione allora sta in $\mathcal{E}$.)

Iperbole: dati $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{I} = \{ Q : |d(Q, P_1) - d(Q, P_2)| = 2k \}$$



$2k + a < a + 2h$

$\Rightarrow k < h$

Equazione canonica: riconduco a

$P_1 = (-h, 0) \quad P_2 = (h, 0)$

$$\sqrt{(x+h)^2+y^2} - \sqrt{(x-h)^2+y^2} = \pm 2k$$

Stessi identici passaggi (gli elevamenti al $\square$ uccidono le diff di sgn)

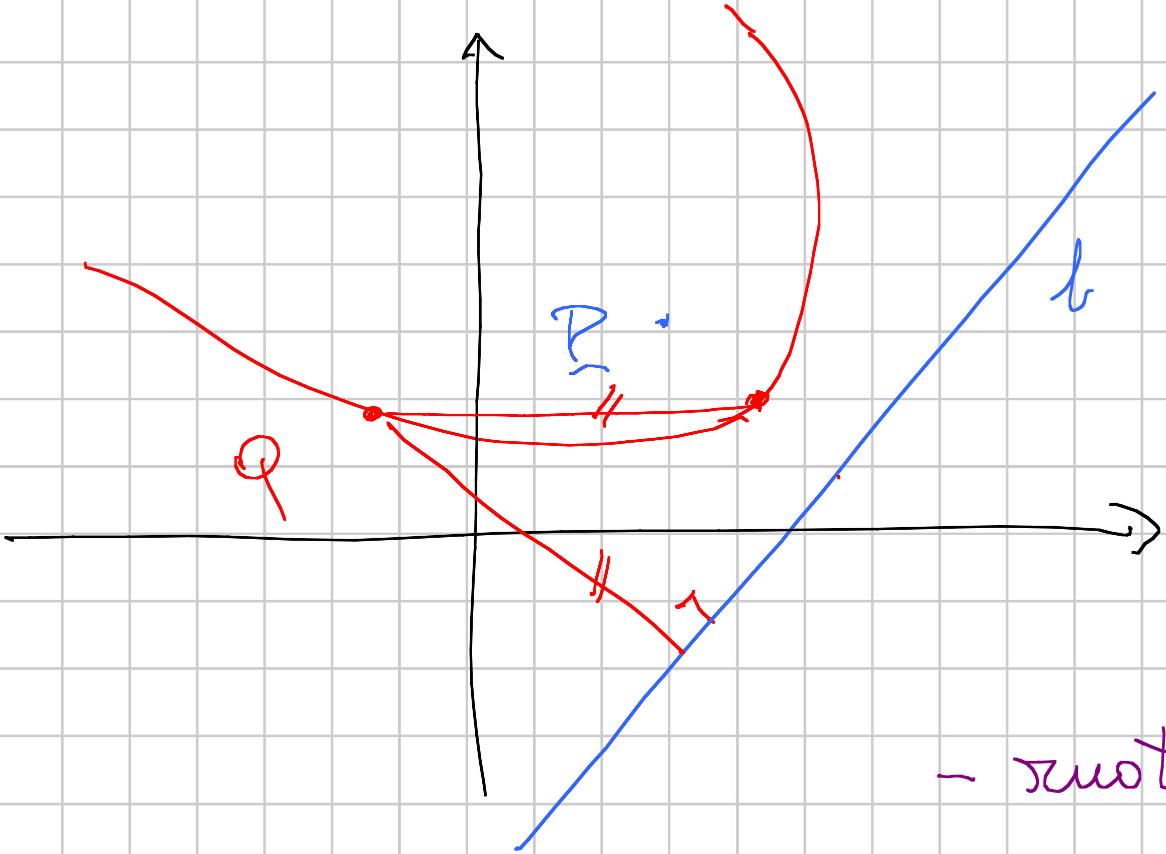
$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2-k^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a,b > 0}$$

Equaz. canonica metrica parabola

<u>Parabola</u>: $\ell \subset \mathbb{R}^2$, $P \in \mathbb{R}^2$, $P \notin \ell$

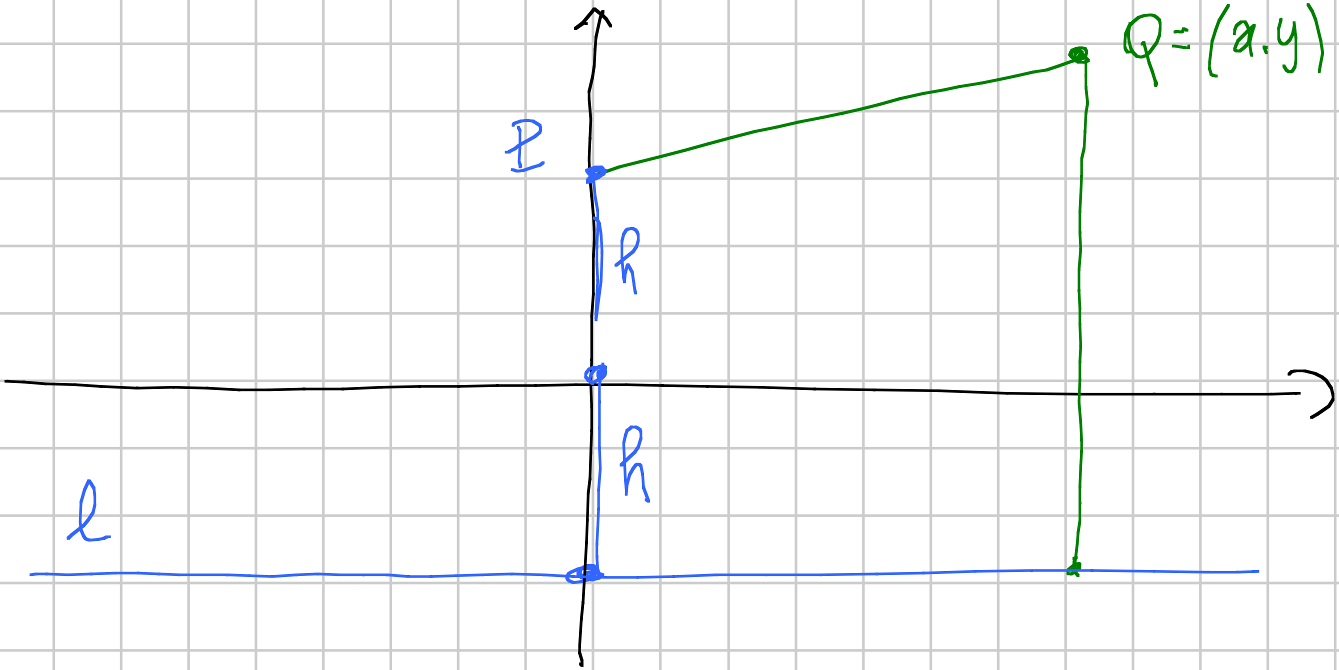
$$\mathcal{P} = \{ Q \in \mathbb{R}^2 : d(Q, \ell) = d(Q, P) \}$$



Equazione canonica:

- prendo il segmento più corto che unisce P a ℓ
- traslo il suo pto medio in 0
- ruoto finché $P=(0,h)$, $\ell: y=-h$ $(h>0)$

$(x,y)\in \wp$



$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-h)^2} = |y+h|$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2hy + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2hy + \cancel{h^2}$$

$$y = \frac{1}{4h}x^2$$

$$\boxed{y = ax^2 \quad a>0}$$

equaz canonica parabola

D'ora in poi considero tali oggetti a meno di trasf. affini: $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \det(A) \neq 0$$

Equaz metrica:

ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \begin{cases} X = \dfrac{x}{a} \\ Y = \dfrac{y}{b} \end{cases}$

Equaz. affine:

$$\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$$

iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\Big\{$ "

$$\boxed{X^2 - Y^2 = 1}$$

parab $y = ax^2$ $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{y}{a} \end{cases}$

$$\boxed{Y = X^2}$$

$\emptyset$

$$\boxed{X^2 + Y^2 + 1 = 0}$$

Osservazione: tutte e 4 le equaz. trovate sono di tipo polinomiale di II grado nelle coord.

Domanda: quale insieme viene definito da una equaz. polinomiale di II grado in $\mathbb{R}^n$?

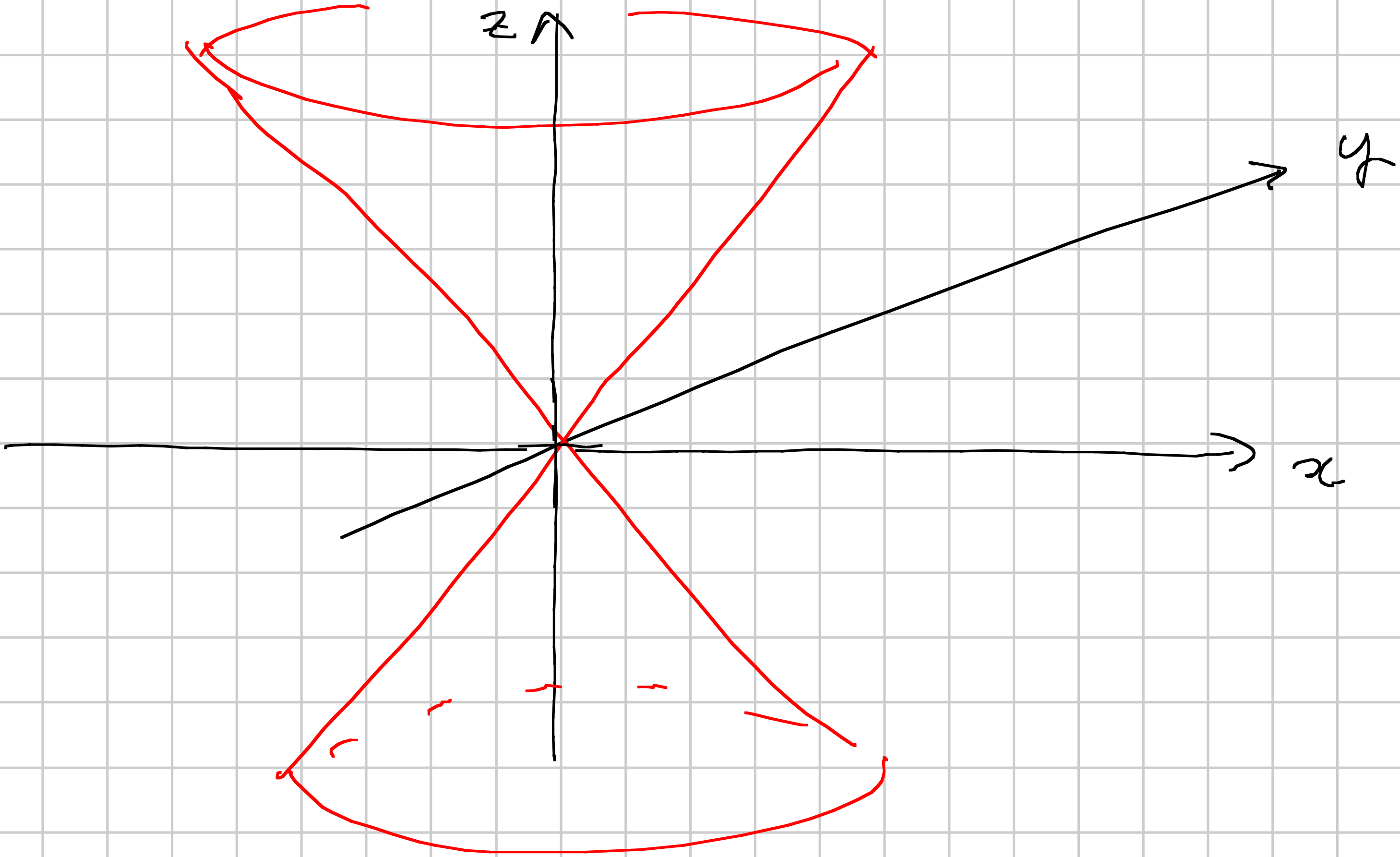
Ellisse, iperbole e parabola sono dette coniche non degeneri

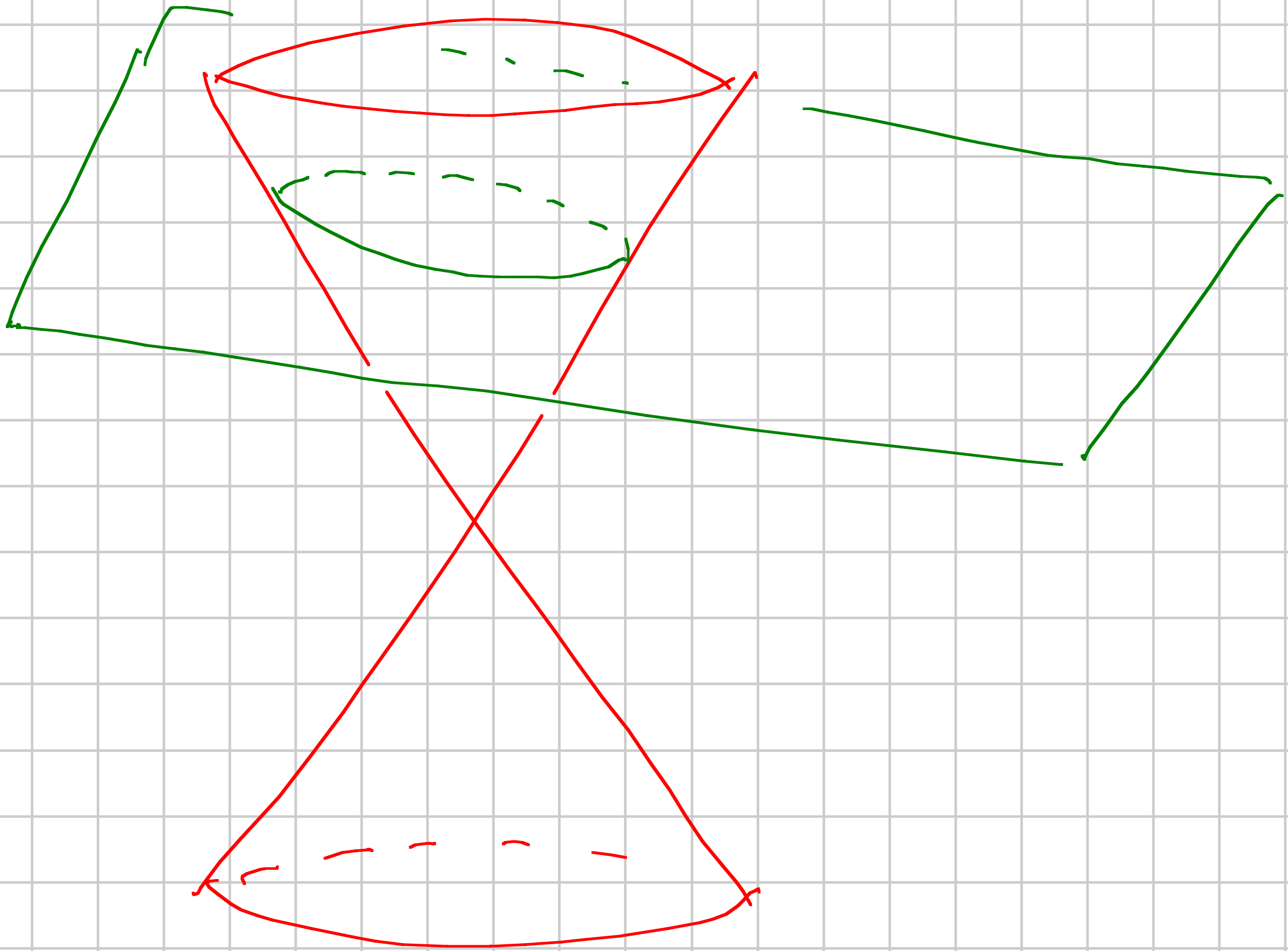
sono sezioni di un cono

dopo

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \underbrace{x^2 + y^2}_{d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\, \text{asse } z\right)^2} = z^2 \right\}$$

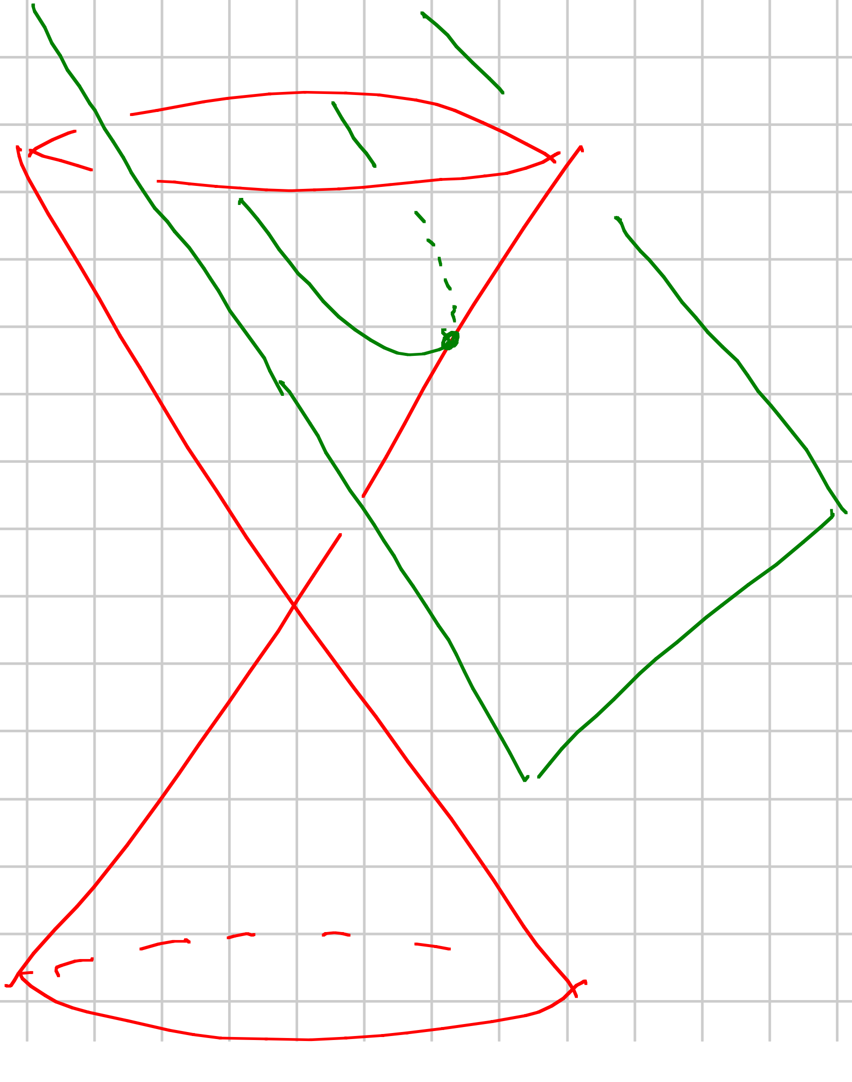
$\Longrightarrow$ C ha simmetria rotaz. intorno all'asse z

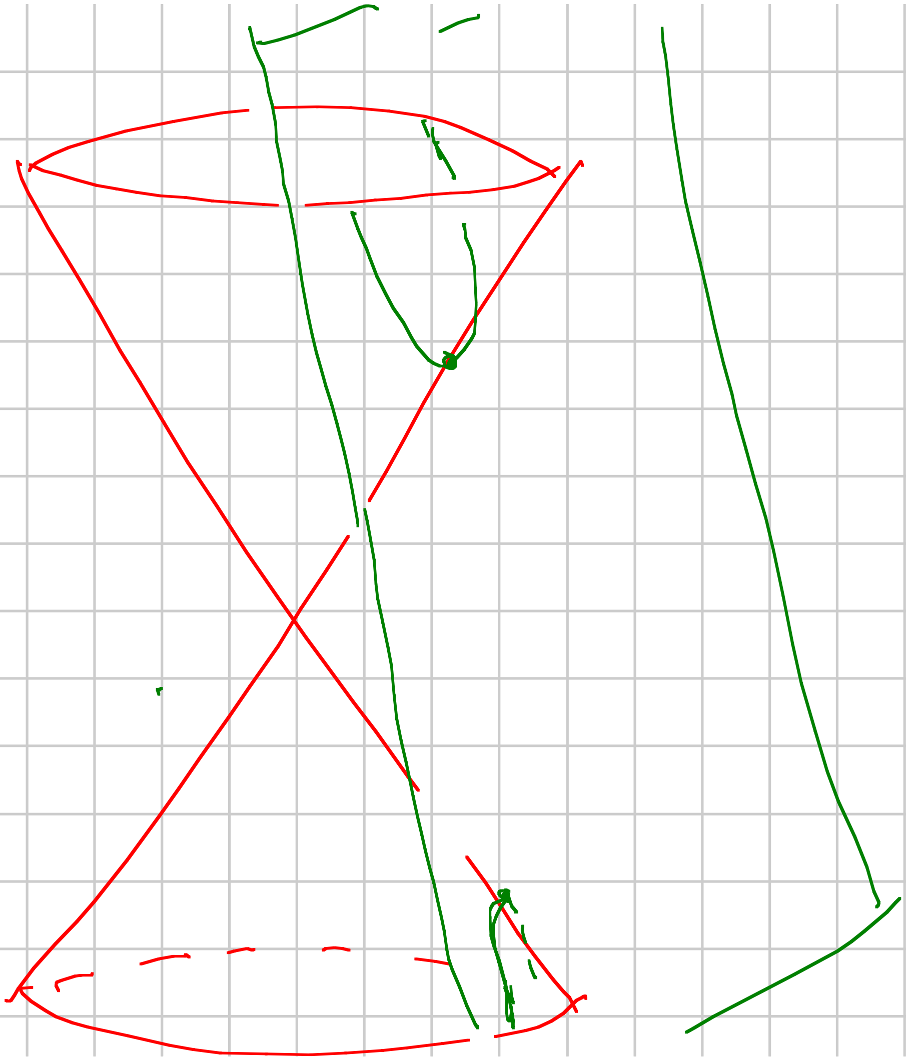

z
y
x



ellisse

parabole





iperbole

Esercizio: esplicitare l'intersezione del cono

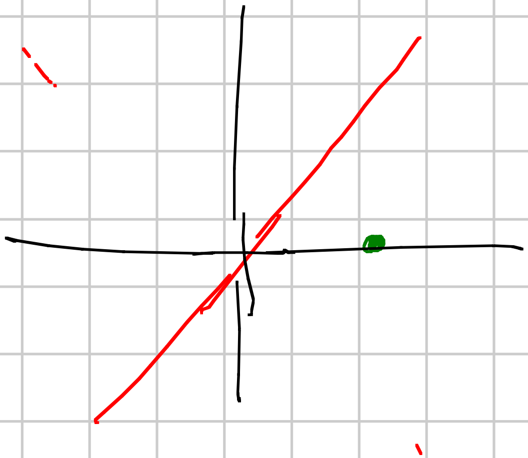
$C: x^2+y^2=z^2$ con

$\pi: \quad y = a\cdot(x-1)$

$a=1$ (parab)

$0<a<1$ (ellisse)

$a>1$ (iperbole)



Fatto: un'equaz. polinomiale di II grado in $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico

come $^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ con $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}$ simm.

Visto: una forma quadratica si scrive in modo unico come $^t x \cdot Q \cdot x$ con $Q \in M_{n \times n}$ simm.

Esempio: $7x^2-5xy+3y^2-2x+y-9=0$

$$^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5/2 & -1 \\ -5/2 & 3 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Esempio: $7x^2-4y^2+5z^2+8xy-10xz+27yz$

$-18x+22y-14z+141=0$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -5 & -9 \\ 4 & -4 & 27/2 & 11 \\ -5 & 27/2 & 5 & -7 \\ \hline -9 & 11 & -7 & 141 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} . $$

<u>Fatto</u>: una trasf. affine $x' = M \cdot x + v$ si può scrivere come

$$ \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} $$

$(x \in \mathbb{R}^n)$

Effetto di una trasformazione affine su una equaz. di II grado:

Equaz:
$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$
$$ A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} $$

$$ {}^t x \cdot Q \cdot x + 2\, l \cdot x + c = 0 $$

matrice della parte quadratica

parte lin.

termine noto

Applico cambio di coord. affine

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \leadsto {}^t\left(N \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot A \cdot N \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightsquigarrow {}^t\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tN \cdot A \cdot N \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow {}^t\left(\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightsquigarrow {}^t\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tM & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}^tM \cdot Q & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}^tMQM & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

<u>Prop</u>: con il cambio di coord. affine di matrice $N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici dell'equaz. e della sua parte quadratica cambiano così:

$$A \rightsquigarrow {}^tN \cdot A \cdot N$$

$$Q \rightsquigarrow {}^tM \cdot Q \cdot M$$

Att: M si può scegliere in $\mathcal{M}_{n \times n}$ purché $\det(M) \neq 0$

invece $N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — resta da scegliere solo v.

Def: un luogo in $\mathbb{R}^n$ definito dall'equaz.

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

è non degenere se $\det(A) \neq 0$.

Equazioni canoniche delle coniche affini:

ellisse	$x^2+y^2-1=0$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$d_2>0$, $d_1 \cdot d_3<0$ (1)
iperbole	$x^2-y^2-1=0$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$d_2<0$, $d_3 \neq 0$ (2)
parabole	$x^2-y=0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$	$d_2=0$, $d_3 \neq 0$ (3)
$\emptyset$	$x^2+y^2+1=0$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$d_2>0$, $d_1 \cdot d_3>0$ (4)

(1) anche $-x^2-y^2+1=0$ è la stessa

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$d_2 > 0$
$d_1 \cdot d_3 < 0$

(2) anche $-x^2+y^2-1=0$ e $x^2-y^2+1=0$ sono iperboli

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$

(3) anche $-x^2+y=0$ è la stessa parab

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad d_2 = 0$$

(4) anche $-x^2-y^2-1=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} d_2 > 0 \\ d_1 \cdot d_3 > 0 . \end{array}$$

__Teo__ : il luogo $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

se $\det(A) \neq 0$ è

- ellisse se $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$
- iperbole se $d_2 < 0$
- parabola se $d_2 = 0$
- $\emptyset$ se $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$.

significa: esiste una trasf. affine che la fa diventare uno dei modelli affini

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 - y^2 = 1$

$y = x^2$

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

(Ovvero: può essere definito geometricamente come all'inizio della lezione).