Geometria 19/4/18

Spazi proiettivi

X insieme ; relazione su X è $R \subset X \times X$.
Scrivo sempre xRy invece che $(x,y) \in R$.

Esempio: $X = \mathbb{R}$.
relazione "minore o uguale di"

$7 \leq 9$ $\quad$ $\cancel{(7,9) \in \leq}$

Una relazione R si dice:

- riflessiva se $xRx \quad \forall x$
- simmetrica se $xRy \Rightarrow yRx$
- transitiva se $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$
- di equivalenza se è rifl., simm., trans.

<u>Esempio</u>: X qualsiasi, R = "è uguale a"

- $x = x$ ✓
- $x = y \Rightarrow y = x$ ✓
- $x = y,\ y = z \Rightarrow x = z$ ✓

<u>Esempio</u>: X = noi qui oggi

$x R y$ se il nome di x ha lo stesso numero di lettere del nome di y

xRx ✓

$xRy \Rightarrow yRx$ ✓

$xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$ ✓

R si dice

antisimmetrica se $xRy,\ yRx \Rightarrow x=y$

d'ordine se è rifl. antisimm. transitiva

Esempio: $\leq$ su $\mathbb{R}$

- $x \leq x$ ✓
- $x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$ ✓
- $x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ ✓

Esempio: X = noi

xRy se il numero di cellulare di x è $\leq$ del numero di cellulare di y

è d'ordine.

Esempio: X = uomini

xRy se il nome di x ha $\leq$ lettere del nome di y.

non è antisimmetrica.

Fissiamo X e consideriamo su X una relazione di equivalenza $\sim$.

Def: chiamo classe di equivalenza di $x \in X$

$$[x] = \{ y \in X : y \sim x \}$$

Esempio: X = noi, $\sim$ = stesso numero di lettere del nome

$$[\text{Carlo}] = \{ \text{Carlo}, \text{Laura}, \text{Kevin}, \dots \}$$

Prop: le classi di equivalenza sono una partizione di X: la loro unione è tutto X e due di loro o coincidono o sono disgiunte.

Dimo: unisco tutto: se
$x \in X$ ho $x \in [x]$.

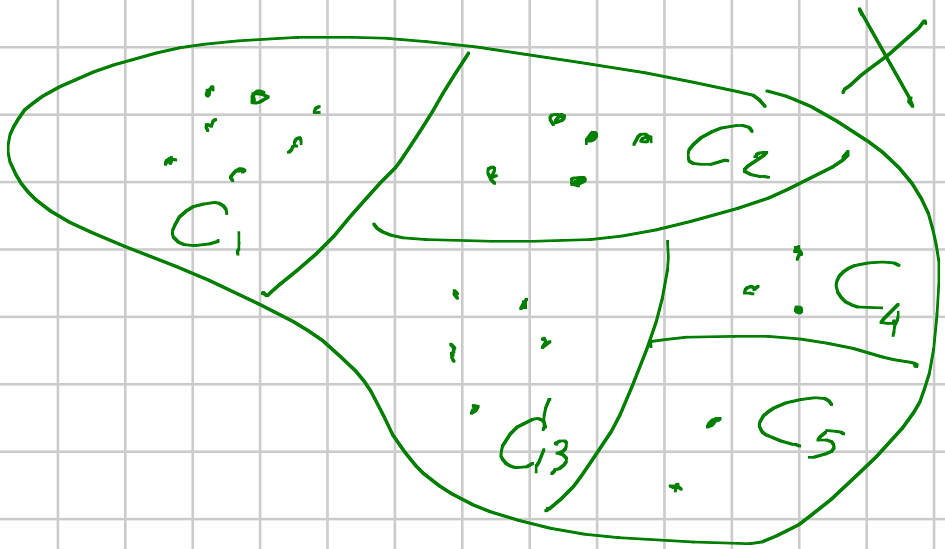
Se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$

ho $z \in [x] \cap [y]$ cioè

$z \sim x$ e $z \sim y$; se $w \in [x]$

ho $w \sim x$, $x \sim z$ (da $z \sim x$ + rifl)

$z \sim y \Longrightarrow w \sim y$ (2x trans)



$\Longrightarrow w \in [y]$. Ho provato che $[x] \subset [y]$.

Analogamente $[y] \subset [x]$, dunque $[x] = [y]$. $\blacksquare$

Def: chiamiamo insieme quoziente l'insieme delle classi di equivalenza; lo indico con $X/_{\sim}$.

Esempio: X = noi, $\sim$ stesso numero di lettere del nome

$$X/_{\sim} = \{ \{Carlo, Laura, Kevin\}, \dots \}$$

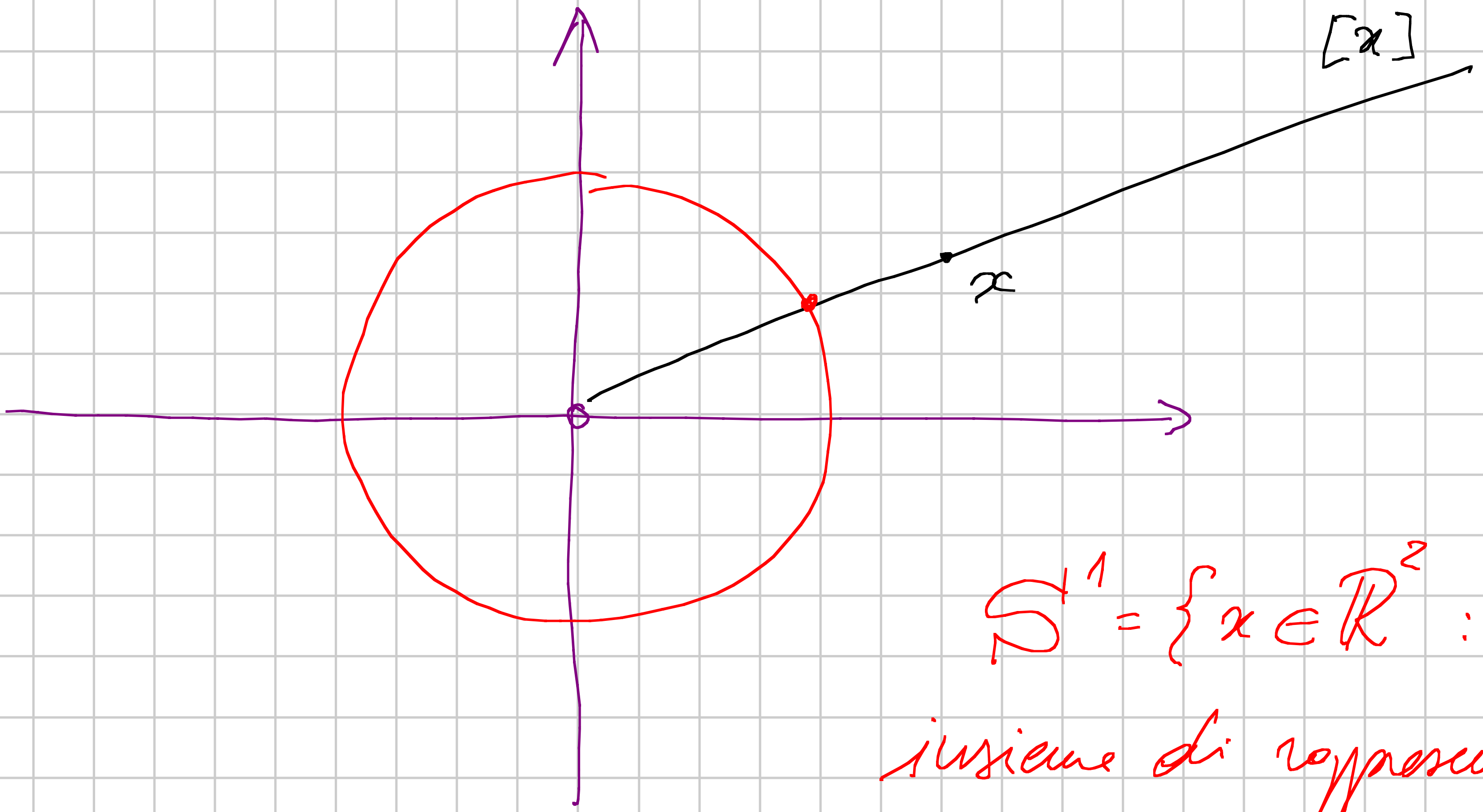
$\{$Gabriele, Vincenzo, ... $\}$

Problema: come descrivere un insieme quoziente?

1) dare un nome a ciascuna classe di equiv.

2) scegliere un insieme di rappresentanti (un elemento in ogni classe di equivalenza).

Esempio: $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; $x \sim y$ se esiste $\lambda > 0$ t.c. $y = \lambda \cdot x$



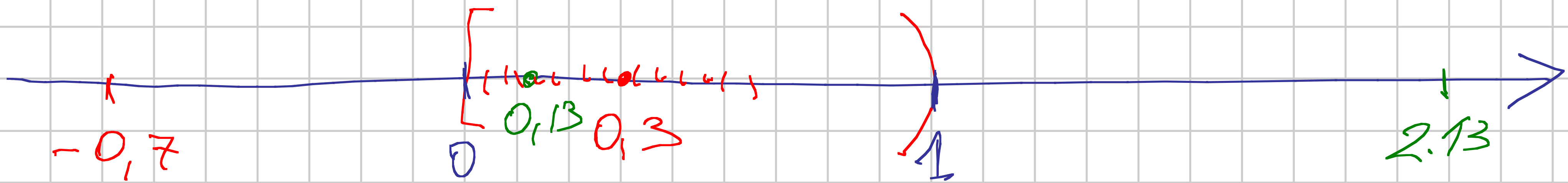
$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

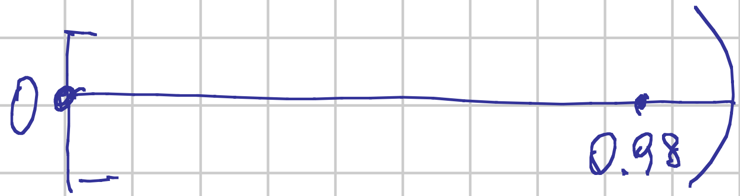
insieme di rappresentanti

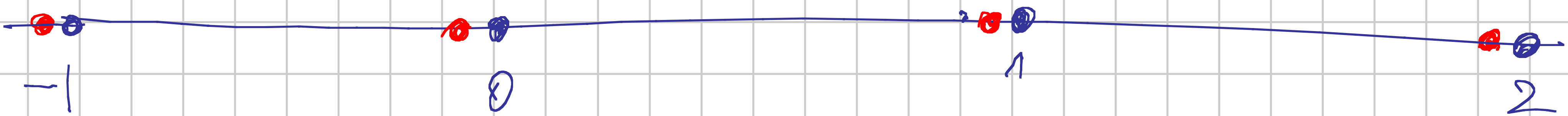
Esempio: $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$

refl ✓ simm ✓

trans: $y - x \in \mathbb{Z}$, $z - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow z - x = \underbrace{(z-y)+(y-x)}_{\in \mathbb{Z}}$



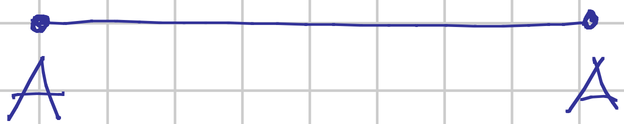




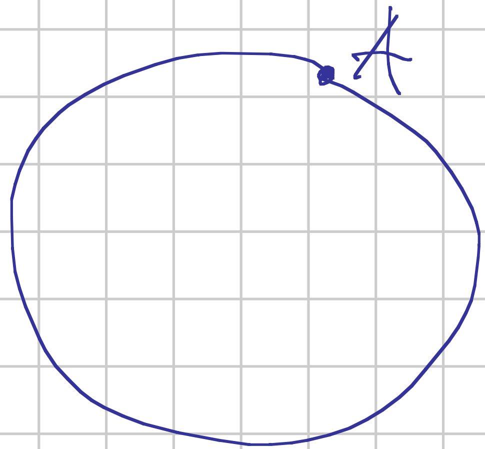
In $[0,1)$ 0 e 0.98 sembrano "lontani" mentre le loro classi di equiv. sono "vicine".

Rimedio: invece che prendere $[0,1)$ prendo $[0,1]$ ma mi ricordo che $0 \sim 1$:

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ =

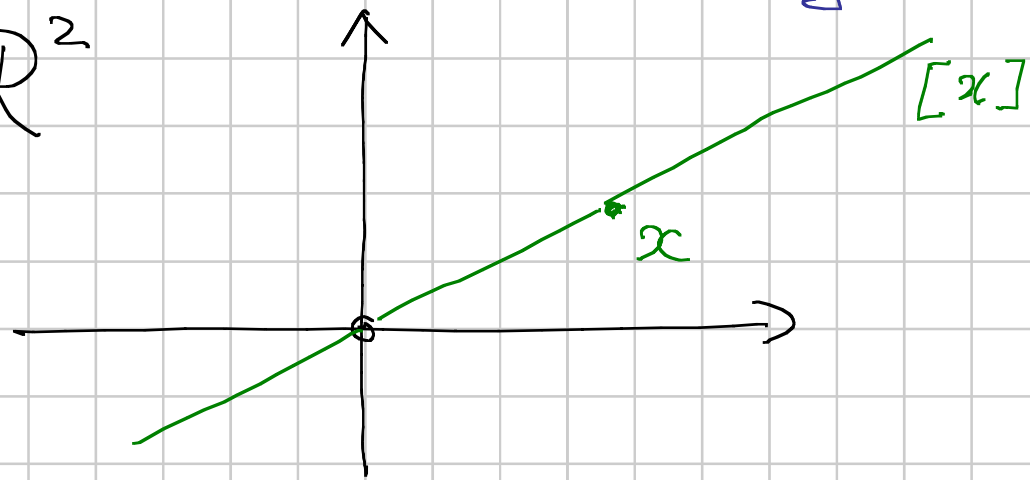


=



Def: se V è uno spazio vettoriale di dim ≥ 1 chiamo spazio proiettivo associato a V il quoziente $\left(V \setminus \{0\}\right)/\sim$ dove $y \sim x$ se $\exists \lambda$ t.c. $y = \lambda \cdot x$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$



Oss: le classi di equiv. sono le rette per O (private di O), dunque

$$\mathbb{P}(V) = \text{“l'insieme delle rette in } V\text{”}$$

Oss: se V ha dim $= 1$ ho $\mathbb{P}(V) =$ un punto

Def: chiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

$\boxed{10.1.6}$ $f : V \to V$, $W \subset V$, $f(W) \subset W$

$g : W \to W$, $g(w) = f(w)$ $\forall w \in W$.

Verificare che $p_g(t)$ divide $p_f(t)$.

Per ogni $h : U \to U$, $p_h(t) = \det\left(t \cdot I - [h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$

$\mathcal{B}$ qualsiasi base di U .

Sia $\mathcal{B}$ una base di W ; completiamola a base $\mathcal{C}$ di V, Allora

$\dim W = k$

$\dim V = n$

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} & T \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f(t)} = \det\left(t \cdot I_n - \begin{pmatrix} [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} & T \\ 0 & S \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t \cdot I_k - [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} & -T \\ 0 & t \cdot I_{n-k} - S' \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(t \cdot I_k - [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \cdot \det\left(t \cdot I_{n-k} - S \right)$$

$$= p_g(t) \cdot p_{S'}(t)$$

$\boxed{10.1.7}$ $f : V \to V$ t.c. $Ker(f) = Im(f)$.

Autovalori? Diagonalizzabile?

Oss: $\underbrace{\dim(Ker(f))}_{\text{uguali}} + \underbrace{\dim(Im(f))}_{\text{uguali}} = \dim(V)$

$\Rightarrow$ $\dim V$ è pari $= 2K$.

Sia λ autovalore, cioè $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.

Allora ho $f(\lambda \cdot v) = 0$ dunque

$$0 = \lambda \cdot f(v) = \lambda^2 \cdot v \Rightarrow \lambda = 0 .$$

l'unico autovalore possibile per f è $\lambda = 0$

dunque l'unico caso in cui f è diagonalizzabile sarebbe $f = 0$ ma questo non va bene:

$\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(f) = V$: impossibile .

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Ker(A) = Im(A) = Span(e_1)$.

$\boxed{10.1.8}$ Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autoval. reale?

---

autovalori sono le radici di

$$P_A(t) = t^n - tr(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

$\in \mathbb{R}[t]$ di grado n

Di certo ha almeno una radice reale se n è dispari

(• $\lim_{t \to \pm\infty} P_A(t) = \pm\infty \Rightarrow$ teo valori intermedi ...

• le radici complesse (che sono n con molt) vengono a coppie complesse coniugate $\Rightarrow$ almeno una è reale).

Viceversa se n è pari

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$ non ha autoval. reali ($\pm i$ con molt. $n/2$)

$\boxed{10.1.10}$ discutere la diagonalizzabilità:

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(È simmetrica
$\Longrightarrow$ è diagonalizzabile
(esiste base ortonormale
di autovettori)

$$P_A(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

(2 autoval. distinti $\Longrightarrow$ diago) –

Autovettori:

$$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ \cancel{-x + y = 0} \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - y = 0 \\ \cancel{-x - y = 0} \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oss: siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hanno m.a. = m.g. = 1

cioè gli autospazi hanno dim = 1

$\Rightarrow$ gli autovettori v_1 e v_2 sono univocamente

determinati a meno di costanti moltiplicative

$\Rightarrow$ qualsiasi v_1 e v_2 trovati come autovettori

saranno ortog. tra loro: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

Per avere la base ortonormale che diagonalizza base normalizzata: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

In generale se $A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{pmatrix}$

ho $P_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$

$\Rightarrow$ ha autoval. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dunque A ha autoval 1 doppio (m.a. $= 2$):

- Se fosse diag. avrei $M^{-1} \cdot A \cdot M = 1 \cdot I_2$
$$\Rightarrow A = M \cdot I_2 \cdot M^{-1} = I_2 \quad \text{NO.}$$

- $$\text{m.g.}(1) = \dim(\operatorname{Ker}(1 \cdot I_2 - A))$$
$$= 2 - \operatorname{rank}(1 \cdot I_2 - A)$$
$$= 2 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow$ mon diago $-$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2) \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = (t-2)(t^2+1)$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = \pm i \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ non diago su $\mathbb{R}$ (qualche autoval non reale)

diago su $\mathbb{C}$ (3 autoval. distinti)

Cerchiamo base che diagonalizza su $\mathbb{C}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ -x = 2y \\ -x + 2z = 2z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_{2,3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = \pm i x \\ \cancel{-x = \pm i y} \\ -x + 2z = \pm i z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm i \\ z = \dfrac{1}{2 \mp i} = \dfrac{2 \pm i}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{m} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & -k \\ 2 & -2 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-1)^3 + (t-1)(2-2k)$$

$$= (t-1)(t^2-2t+3-2k)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-3+2k} = 1 \pm \sqrt{2(k-1)}$

$k > 1$ tutti distinti $\Rightarrow$ diago su $\mathbb{R}$

$k < 1$ non reali ma distinti in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ diago su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$

$k = 1$ autovalore 1 con m.a. $= 3$

se fosse diagonalizzabile $M^{-1} \cdot A \cdot M = I_3$

$\Rightarrow A = M \cdot I_3 \cdot M^{-1} = I_3$ ∴ NO