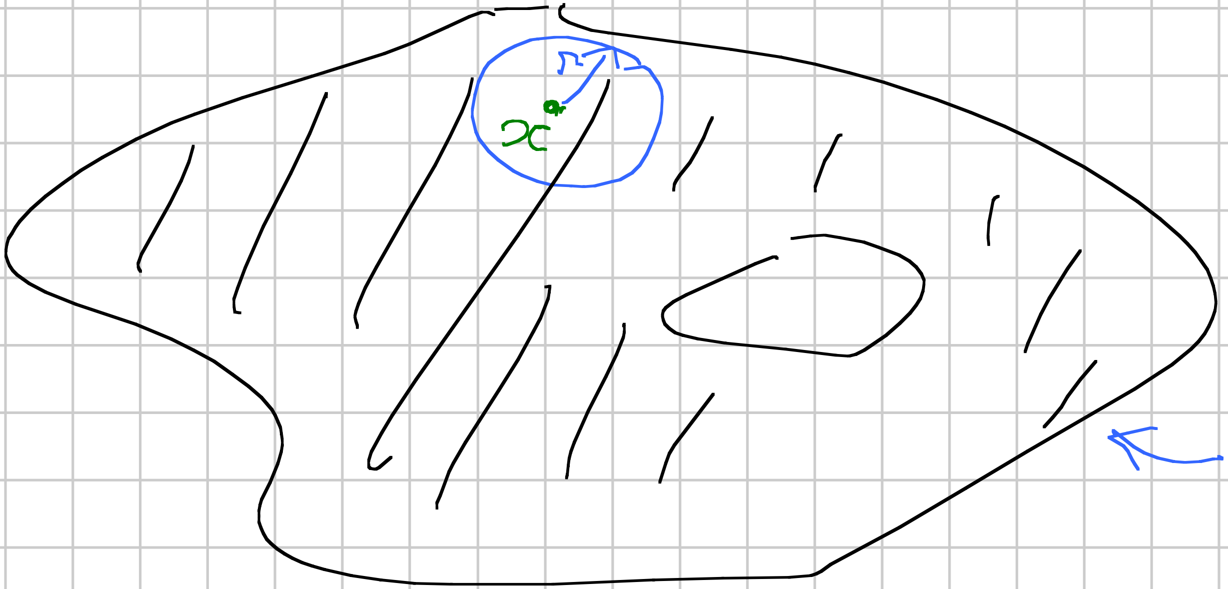
Geometria 21/3/18

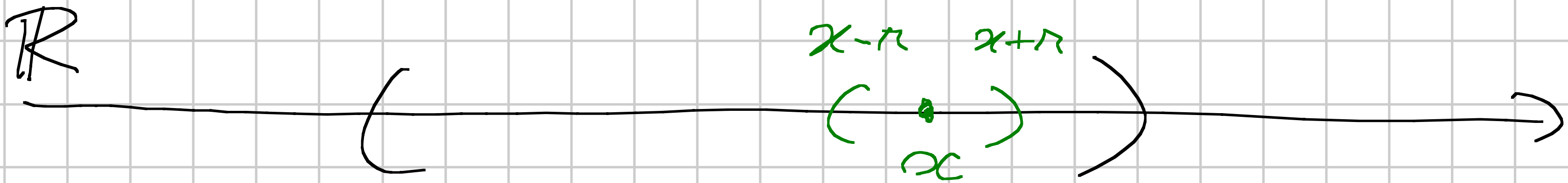
Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall x \in \Omega$ $\exists r > 0$ t.c. $B(x,r) \subset \Omega$

palla centro x e raggio r

$= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$



poiché sia aperto è senza bordo.



Def: se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto chiamo derivata parziale di f rispetto a x_j

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_j) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Cioè: è la derivata di f rispetto a x_j considerando come parametri fissati le altre coord.

Es: $f(x,y) = \sin(5x^2y^7 - 9x^3y^5) \cdot e^{2x^4y^6}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(5x^2y^7 - 9x^3y^5) \cdot (10xy^7 - 27x^2y^5) e^{2x^4y^6}$$

$$+ \sin(\text{---}) \cdot e^{2x^4y^6} \cdot 8x^3y^6$$

Def: gradiente di f in x

$$\mathrm{grad}_x(f) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 (x) \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n (x) \end{pmatrix}$$

Derivaz. delle funzioni composte:

$$\left(n = 1 \quad D\, g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1(x), \dots, f_k(x)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_i}(\dots) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

<u>Def</u>: derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)$$

Es:

$$f(x,y) = 9x^4y^7$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 36x^3y^7 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 63x^4y^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 252x^3y^6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 252x^3y^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 108x^2y^7 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 378x^4y^5$$

Teo: se f è abbastanza regolare ho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \forall i,j$$

Def: chiamo matrice hessiana di f in x

$$H_x f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \in M_{n \times n}$$

Teo $\Leftrightarrow$ $H_x f$ è simmetrica.

Taylor$_{n=1}$: $f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + \frac{1}{2} f''(x)\cdot t^2 + o(t^2)$

Teo: se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è regolare su Ω aperto, $x \in \Omega$

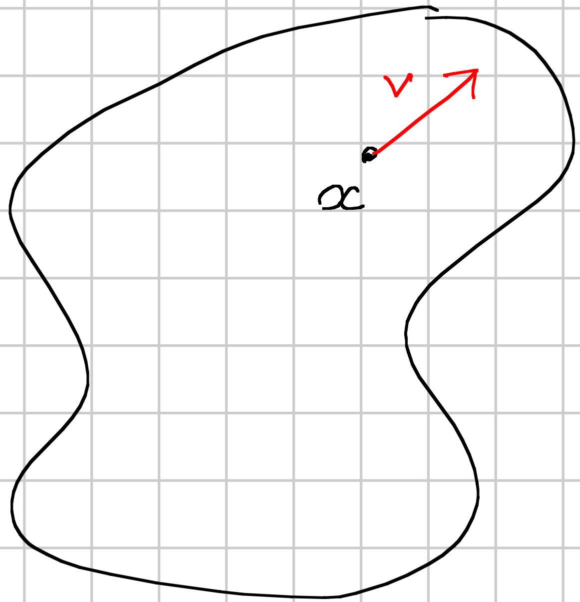
Allora $f(x+v) =$

$$= f(x) \qquad (0)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i \qquad (1)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i \cdot v_j \qquad (2)$$

$$+ o\left(\|v\|^2\right) \qquad (R)$$



"<u>Dim.</u>" Pongo $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ e fingo che u sia fisso

e pongo $t = \|v\|$ dunque $v = u \cdot t$, e allora

$f(x+v) = f(x+tu)$ "$=$" funzione della sola t; la chiamo $g(t)$.

Taylor $n=1$: $g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$

(0) (1) (2) (R)

$g(0) = f(x)$ (0)

$g'(t) = \dfrac{d}{dt} f(x_1 + tu_1, \dots, x_n + tu_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+tu)\cdot u_i$$

$$\Rightarrow g'(0)\cdot t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot \underbrace{tu_i}_{v_i} \qquad (1)$$

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot u_i u_j$$

$$\frac{1}{2} g''(0) t^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot \underbrace{tu_i}_{v_i}\cdot \underbrace{tu_j}_{v_j} \qquad (2)$$

$t = \|v\|$ $\qquad o(t^2) = o(\|v\|^2)$ $\qquad$ (R) $\qquad \square$

<u>$n=1$</u> $\qquad x$ min rel. di $f \Rightarrow f'(x)=0,\ f''(x) \geq 0$

$f'(x)=0,\ f''(x)>0 \Rightarrow x$ min rel.

<u>$n>1$</u> $\qquad$ posso scrivere il Teo

$$f(x+v) = f(x) + \left\langle \mathrm{grad}_x f \,\middle|\, v \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$+\frac{1}{2}\langle v \mid v\rangle_{H_x f} + o(\|v\|^2)$$

<u>Oss</u>: x min. rel. per $f \Rightarrow \mathrm{grad}_x f = 0$

$$\left(f(x - t \cdot \mathrm{grad}_x f) < f(x) \quad \text{per } 0 < t \ll 1 \right).$$

<u>Q</u>: quali sono gli analoghi per $n \geq 2$ di $f''(x) \geq 0$ e $f''(x) > 0$?

$f''(x) > 0 \iff \langle \cdot | \cdot \rangle_{H_x f}$ def. pos.

(risposta vera) _

———— o ————

Ricliamo: V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ di $\dim < +\infty$

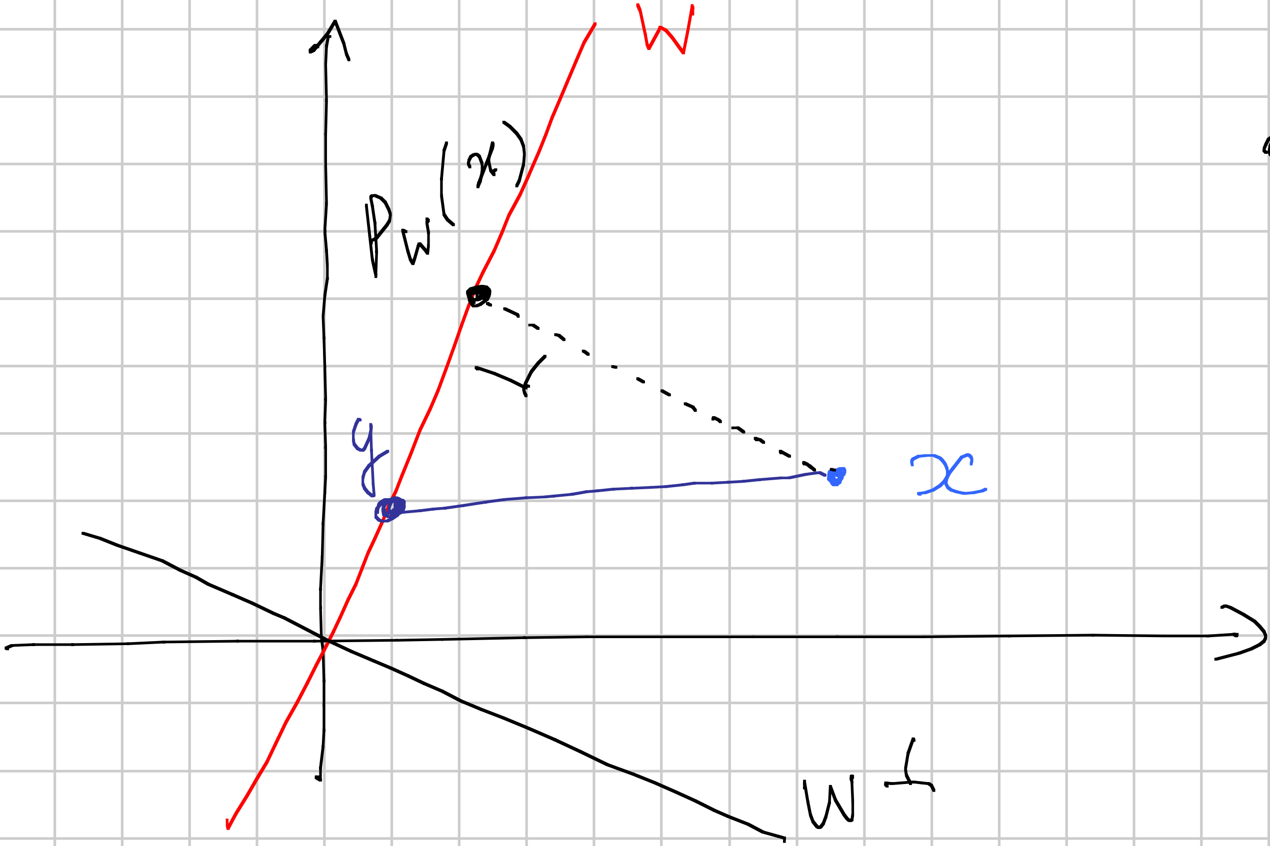
$W \subset V$ stsp. ; P_W proiez. ortog. su W

= la proiez. su W associata a $V = W \oplus W^{\perp}$.

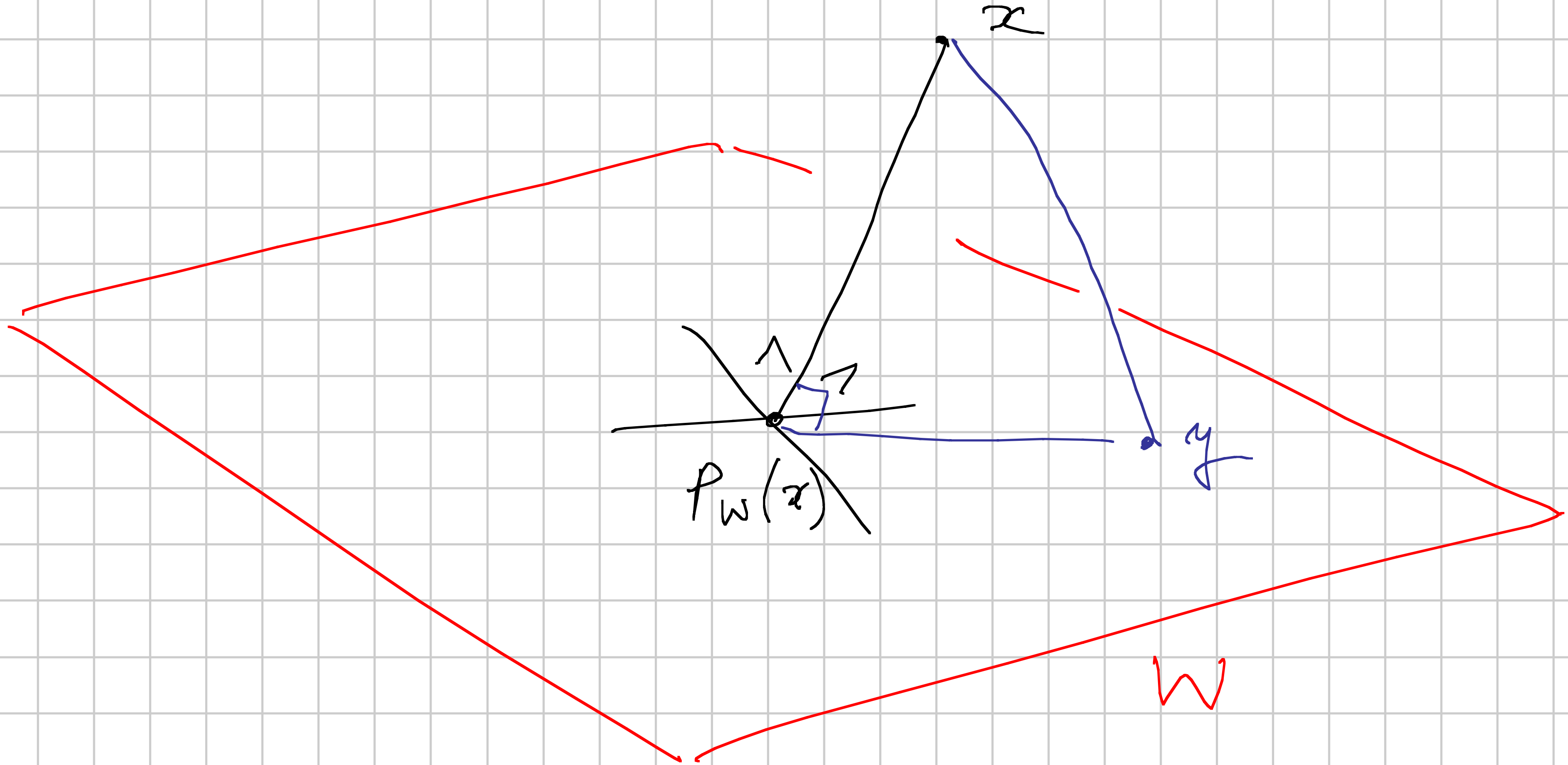
Visto: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortog. di W

$$\Longrightarrow \quad P_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v \mid w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j \,.$$

<u>Prop</u>: $P_W(v)$ è il punto di W più vicino a v.



$$d(y,x) \geq d(p_W(x),x)$$
$$\forall y \in W$$



x
y
P_W(x)
W

<u>Dim</u>: $w \in W \iff w = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$

$$d(w, x)^2 = \|w - x\|^2 = \|t_1 w_1 + \dots + t_k w_k - x\|^2$$

$$= \langle t_1 w_1 + \dots + t_k w_k - x \mid t_1 w_1 + \dots + t_k w_k - x \rangle$$

$=$ somma di $(k+1)^2$ termini, però

$$t_i \cdot t_j \underbrace{\langle w_i \mid w_j \rangle}_{\substack{\| \\ 0}} \quad \text{per } i \neq j$$

$\Longrightarrow$ sopravvivono solo quelli con x

e quelli con $\langle w_i | w_i \rangle$

$$= - \sum_{i=1}^{k} t_i \langle w_i | x \rangle + \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} t_i \langle x | w_i \rangle$$

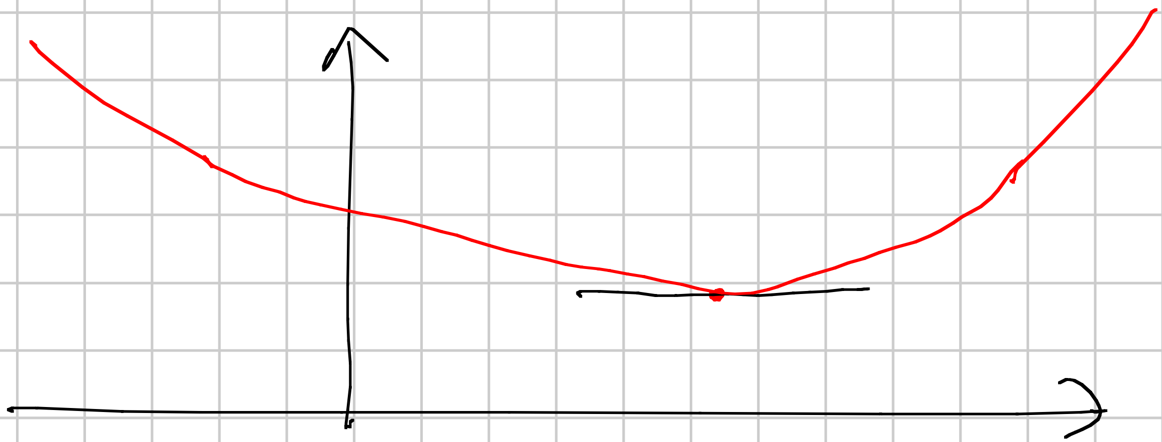
$$+ \sum_{i=1}^{k} t_i^2 \|w_i\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{k} t_i \langle x | w_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \|w_i\|^2$$

$= f(t_1, \dots, t_k)$

di cui cerco il minimo.

noto che $\lim_{\|t\| \to \infty} f(t) = +\infty$.



Se troviamo un solo pto in cui $\text{grad}_t f = 0$ lui è di minimo:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}(t) = 0 - 2 \cdot 1 \cdot \langle x | w_j \rangle + 2 t_j \|w_j\|^2$$

nullo $\iff$ $t_j = \dfrac{\langle x | w_j \rangle}{\|w_j\|^2}$; è min. nel pto

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle x | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$ che è proprio $P_W(x)$. ■

In $\mathbb{R}^3$

retta ℓ parametrica $\longleftrightarrow$ piano $\ell^\perp$ cartesiano

$$\ell = t \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \ell^\perp : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

retta ℓ cartesiana $\longleftrightarrow$ piano $\ell^\perp$ parametrica

$$\ell : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases} \qquad \ell^\perp : t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Visto: metodi analoghi per passaggi (det 2×2)

piano π parametrico $\rightsquigarrow$ piano π cart. $\longleftrightarrow$ retta $\pi^\perp$ param

$\Updownarrow$ se $\pi \perp \ell$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

retta ℓ cartesiana $\rightsquigarrow$ retta ℓ param $\longleftrightarrow$ piano $\ell^\perp$ cart

Morale det 2×2 serve a: dati due vettori (gen. di piano) serve un gen. della retta perp. a essi.

Chiamo tale operazione prodotto vettoriale:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

notaz. usata anche $\times$

<u>Fatti</u>: 1) $v \wedge w = 0 \Leftrightarrow v, w$ sono lin. dip.

2) se v, w sono lin. indip. $v \wedge w$ è un vettore ortogonale a entrambi

3) $\|v \wedge w\|$ = area del parallelogramma di lati v, w

4) $v, w, v \wedge w$ soddisfano la regola mano dx

— o —

Def: dato V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dico che $f: V \to V$ è autoaggiunta se $\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle$ $\forall v, w$.

Es: $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ $f = M \in M_{n \times n}$.

Autoaggiunta se $\langle Mx | y \rangle = \langle x | My \rangle$ $\forall x y$

$\iff$ ${}^t y \cdot Mx = {}^t(My) \cdot x$ $\forall x y$

$\iff \quad {}^t y \cdot M \cdot x = {}^t y \cdot {}^t M \cdot x \quad \forall x, y$

$\iff \quad {}^t M = M \quad$ (M simmetrica).

<u>Prop</u>: (per V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$) ; $p : V \to V$ è una proiez. ortog. $\iff$ $p \circ p = p$ e p autoaggiunta.

<u>Dim</u>: $\underline{\Longrightarrow}$ se p è proiez. su W risp. a $V = W \oplus W^\perp$ so che $p \circ p = p$;

se $\quad v_1 = w_1 + u_1 \qquad\qquad v_2 = w_2 + u_2$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \cap \\ p(v_1) & W^\perp \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \parallel & \cap \\ p(v_2) & W^\perp \end{array}$$

$$\langle p(v_1) \mid v_2 \rangle = \langle w_1 \mid w_2 + u_2 \rangle = \langle w_1 \mid w_2 \rangle$$

$$\langle v_1 \mid p(v_2) \rangle = \langle w_1 + u_1 \mid w_2 \rangle = \langle w_1 \mid w_2 \rangle$$

<u>OK</u>

<u>$\Leftarrow$</u> Se $p \circ p = p$ e p è autoaggiunta,

dalla prima info so che p è proiez su

$W = \mathrm{Im}(p)$ rispetto a $V = W \oplus U$, $U = \ker(p)$.

Dalla seconda info devo dedurre che $U = W^\perp$;

$w \in W$, $u \in U$ ho

$$\begin{array}{ccc} \langle p(w) \mid u \rangle & = & \langle w \mid p(u) \rangle \\ \| & & \| \\ \langle w \mid u \rangle & & \langle w \mid 0 \rangle \\ & & \| \\ & & 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow U \subset W^\perp$; so che

$$\dim(U) = \dim(V) - \dim(W)$$

$$\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$$

$\Longrightarrow U = W^\perp$. $\boxtimes$

<u>Cor</u>: $M \in M_{n \times n}$ è proiez. ortogonale

$\Longleftrightarrow M \cdot M = M$ e ${}^tM = M$

(in $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$).

Es: trovare la matrice della proiez. ortog. su $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ verificando le proprietà.

I modo: cerco base ortog. di W e applico formula:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad w_2 = k \cdot \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{14-3-5}{4+1+25} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

$(k=5)$

$$= 5 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

verifico: $66 - 16 - 50$ ✓

$$p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2x+y-5z}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{33x-16y+10z}{33^2+16^2+10^2} \begin{pmatrix} 33 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es: $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

II modo: $P_W + P_{W^\perp} = id_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow P_W = id_{\mathbb{R}^3} - P_{W^\perp}$

$$W^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \text{Span}\begin{pmatrix}-7\\10\\8\end{pmatrix}$$

verifichiamo: $-14-10+24$ ✓

$-28+20+8$ ✓

$$P_W\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{-7x+10y+8z}{49+100+64}\begin{pmatrix}-7\\10\\8\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{213}\begin{pmatrix}164 & 70 & 56\\70 & 113 & -80\\56 & -80 & 149\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M}$$

$$^tM = M \qquad \checkmark$$

$$M \cdot M = M$$

Def: su $V, \langle \cdot | \cdot \rangle$ chiamo $f: V \to U$ <u>isometria</u> se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle$

cioè se f conserva $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

<u>Oss</u>: poiché $\| \cdot \|$ determina $\langle \cdot | \cdot \rangle$

f isometria $\Longleftrightarrow$ conserva $\| \cdot \|$

$\Longleftrightarrow$ conserva le distanze.

<u>Oss</u>: per $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ $\quad M \in \mathcal{M}_{n \times n}$

è isometria se:

$$\langle Mx \mid My \rangle = \langle x \mid y \rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^t(My) \cdot (Mx) = {}^t y \cdot x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^t y \left({}^t M \cdot M \right) \cdot x = {}^t y \cdot x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^t M \cdot M = I_n .$$

Diremo tali matrici ortogonali.

Oss: M è ortogonale $\iff$ le sue colonne sono base ortonormale

$M = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

M ortog $\iff {}^tM \cdot M = I_n$

$\iff ({}^tM \cdot M)_{ij} = \delta_{ij}$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \vdots \\ {}^t v_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_n) \right)_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\iff {}^t v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$$

$$\iff \langle v_j | v_i \rangle = \delta_{ij}$$

$\iff$ $v_1, \dots, v_n$ ortonormale.