# Geometria 28/3/18

$f: V \to V$ cerchiamo $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ = diagonale
o facile

$\dim(V) = n$

$p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$ ben def.

$\lambda$ autovalore di $f$ se $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.

<u>Prop</u>: $\lambda$ autoval $\iff p_f(\lambda) = 0$.

**Lem**: date $A \in M_{m\times k}$, $B \in M_{k \times m}$ ho

$$tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A).$$

**Dim**: $tr(A\cdot B) = \sum_{i=1}^{m} (A\cdot B)_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (A)_{ij} \cdot (B)_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} (B)_{ji} \cdot (A)_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (B \cdot A)_{jj} = tr(B \cdot A) . \qquad \boxed{//}$$

Esercizio: date $A, B, C \in M_{n \times n}$ quanti diversi fra loro possono essere i valori della traccia dei loro prodotti nei diversi ordini?

(Att: non è uno solo.)

**Prop**: data $f : V \to V$ sono ben definiti

$$tr(f) = tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$det(f) = det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

(cioè: non dipendono da $\mathcal{B}$).

**Dim**: $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$

$$tr\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right) = tr\left(\left(M^{-1}\right)\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M\right)\right)$$

Lemma

$$= tr\left([f]\cdot M\cdot M^{-1}\right) = tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$\det\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right) = \det\left(M^{-1}\cdot[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot M\right)$$

$$= \cancel{\det\left(M^{-1}\right)}\cdot\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)\cdot\cancel{\det\left(M\right)}.$$

$\blacksquare$

Prop: $p_f(t) = t^n - tr(f) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot det(f)$.

Dim: $t^n$ ✓

Termine noto $= p_f(0) = det(0 \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

$= det(-[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = (-1)^n \cdot det(f)$

coeff $t^{n-1}$ : $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$\varphi_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & \cancel{t-a_{22}} & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & \cancel{t-a_{33}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= (t-a_{11})(t-a_{22})(t-a_{33})\cdots$$

$$+ (\text{grado} \leq n-2)$$

$$= t^n - \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_{33} \cdots \cdots)}_{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f)} t^{n-1} + (\text{grado} \leq n-2)$$

$\blacksquare$

**Esempio**: $X = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$f(x) = A \cdot x \qquad f : X \to X$

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 8 & -27 \\ -1 & 1 & -2 \\ 17 & -7 & 24 \end{pmatrix}$$

(per vedere che $f$ è ben def. dovrei verificare che $f_A(X) \subset X$; posto $\omega = (1,1,1)$ basta vedere che

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} -19 & 9 & -27 \\ -1 & 1 & -2 \\ 17 & -7 & 24 \end{pmatrix} = (-3,$$

$$(\ldots)$$

Es: $X = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$f(x) = A \cdot x \qquad f : X \to X$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1, 1, 1) \cdot A = (-2, -2, -2)$ ✓

$$P_f(t) = \det\left(t \cdot I_2 - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P_f(t) = t^2 - tr(f) \cdot t + det(f)$$

$$= t^2 + 0 \cdot t - 43$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{43}$ autovalori.

autovettori di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$v_{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -6\alpha + \beta = \pm\sqrt{43}\cdot\alpha \\ 7\alpha + 6\beta = \pm\sqrt{43}\cdot\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mp\sqrt{43} - 6)\alpha + \beta = 0 \\ 7\alpha + (\mp\sqrt{43} + 6)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mp\sqrt{43} - 6 & 1 \\ 7 & \mp\sqrt{43} + 6 \end{pmatrix} = 43 - 36 - 7 = 0 \checkmark$$

$$v_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{43}+6 \end{pmatrix}$$

Autovettori di $f$:

$$w_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\pm\sqrt{43}+6\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots$$

——— o ———

<u>Oss</u>: se $f$ è diagonalizzabile

$$\exists \mathcal{B} \text{ t.c. } [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_f(t) = (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n)$$

$\Rightarrow p_f(t)$ ha $n$ radici in $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$
contate con le loro molteplicità

per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ questo è sempre vero

per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ non è sempre vero

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = t^2 + 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

**Oss**: se $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ è monico di grado $n$ allora il coeff. di $t^{n-1}$ è la $-$somma delle radici in $\mathbb{C}$ con la loro molt. mentre il termine noto è $(-1)^n \cdot$ loro prodotto:

$$p(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$$
$$= t^n - (\lambda_1+\lambda_2 \cdots + \lambda_n)\, t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

<u>Coro</u>: per $f: V \to V$ la somma delle radici in $\mathbb{C}$ di $p_f(t)$ con molt. è $tr(f)$ mentre il loro prodotto è $\det(f)$.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

autoval su $\mathbb{C}$: $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -30$

$\Rightarrow \lambda_1 = -6 \ , \ \lambda_2 = 5$ sono reali

($\Rightarrow$ A è diago perché prendendo due autovett. relativi a $-6$ e a $5$ trovo che sono lin. indip.).

<u>Teo</u>: se $f$ ha $n$ autoval. <u>distinti</u> in $\mathbb{K}$ allora $f$ è diago.

Es: $A = \begin{pmatrix} -11 & 27 \\ -12 & 25 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 14$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\overset{25}{25} + \overset{54}{27}$

$= -275 + 324 = 49$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 7$

Affermo che A non è diago: se lo fosse

$\exists M$ t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot I_2$

$\Rightarrow A = M \cdot 7 \cdot I_2 \cdot M^{-1} = 7 \cdot M \cdot I_2 \cdot M^{-1} = 7 \cdot I_2$

e questo non è vero.

Scoperto: una matr. $2 \times 2$ con autoval uguali è diagonalizzabile solo se è già diagonale.

Anzi: una matr $n \times n$ con tutti gli $n$ autoval. uguali è diagonalizzabile solo se è già diagonale.

$\boxed{\text{autoval. distinti} \Longrightarrow \text{diagonalizzabile}}$

autoval $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti

autovett. $v_1, \dots, v_n$ $(\neq 0)$

Basta vedere che sono base, anzi che sono lin. indip.

Dimostro per induz. finita su $k = 1, \dots, n$ che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

$\underline{k=1}$ : $v_1 \neq 0$ ✓

Supponiamo $v_1, \dots, v_k$ lin. indip.;

proviamolo per $v_1, \dots, v_{k+1}$.

Se sono lin. dip. ho

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_{k+1} \cdot v_k$$

$$\|$$

$$f(v_{k+1}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k$$

$$0 = \alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_k$$

$v_1, \dots, v_k$ lin. indip $\Longrightarrow$ $\alpha_j \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_j)}_{\neq 0} = 0 \quad j = 1 \dots k$

$\Longrightarrow \alpha_j = 0 \quad j = 1, \dots, k$

$\Longrightarrow v_{k+1} = 0$ $\underline{\underline{\text{No}}}$

$\blacksquare$

$\boxed{9.3.17\ (b)}$ Trovare eq. param della retta $\pi^{\perp}$

$$\pi = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

---

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \pi^{\perp} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

verifica: $-46 + 64 - 18$ ✓

$-46 + 16 + 30$ ✓

$\boxed{9.3.18(b)}$ Trovare eq. cart. del piano $l^{\perp}$

$$l : \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ 7x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

---

$$l = \left( \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$$

$$\Rightarrow l^{\perp} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

trovare eq. cart. di $\ell^\perp$ significa trovare eq. param. di $\ell$ :

$$\ell = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -14 \\ +8 \\ 37 \end{pmatrix}$$

verifica: $-42-32+74$ ✓ $\quad -98+24+74$ ✓

$$\ell^\perp : \ -14x + 8y + 37z = 0$$

$\boxed{9.4.1\ (d)}$ Trovare matrice $A$ di $P_W$

$$W = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{w_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_2}\right) \subset \mathbb{R}^3$$

---

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} \qquad \tilde{u}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2 | w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 \qquad u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$$

$$P_W(x) = \langle x | u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle x | u_2 \rangle \cdot u_2 = \dots$$

Oppure: $\quad x = P_W(x) + P_{W^\perp}(x)$

$$\Rightarrow P_W(x) = x - P_{W^\perp}(x)$$

$W^\perp$ generato da $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} +37 \\ -11 \\ +19 \end{pmatrix}$

verifichiamo: $\quad -111 - 22 + 133$ ✓

$\quad 74 - 55 - 19$ ✓

$$P_W(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{37x_1 - 11x_2 + 19x_3}{37^2 + 11^2 + 19^2} \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1851} \begin{pmatrix} 482 & 407 & \cdot \\ 407 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\boxed{(g)}$ $$W = \operatorname{Span}\left( \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

---

$$\langle w_1 | w_2 \rangle = -2 - 6 + 3 - 5 = -10$$

$$v_1 = w_1 \qquad v_2 = \|w_1\|^2 \cdot w_2 - \langle w_2 | w_1 \rangle \cdot w_1$$

$$= 15 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 55 \\ 65 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

verifico $V_2 \perp V_1$ : $2 + 0 + 11 - 13$ ✓

$$P_W(x) = \frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4}{15}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{x_1 + 11x_3 + 13x_4}{291}\begin{pmatrix}1\\0\\11\\13\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 291}\begin{pmatrix}(4\cdot 291 + 1\cdot 15) & -6\cdot 291 & \cdot & \cdot \\ -6\cdot 291 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix} x$$

$\boxed{9.4.2\,(c)}$ trovare $X$ autoaggiunte rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ + altre condiz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad tr(X) = 0 \qquad {}^tX = X$$

---

In generale quali $X \in M_{n\times n}$ sono autoaggiunte rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ ?

$$\langle Xv \mid w \rangle_A = \langle v \mid Xw \rangle_A \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff \quad {}^t w \cdot A \cdot (Xv) = {}^t (Xw) \cdot A \cdot v \qquad \forall v, w$$

$$\iff \quad {}^t w \cdot (A \cdot X) \cdot v = {}^t w \cdot ({}^t X \cdot A) \cdot v \qquad \forall v, w$$

$$\iff \quad A \cdot X = {}^t X \cdot A$$

Per noi: $\quad X = \begin{pmatrix} t & s \\ s & -t \end{pmatrix}$ con

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s \\ s & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ s & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2t + s = 2t + s & \checkmark \\ 2s - t = t + s & \\ t + s = 2s - t & \checkmark \\ s - t = s - t & \checkmark \end{cases}$$

$$s = 2t$$

$$X = t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$