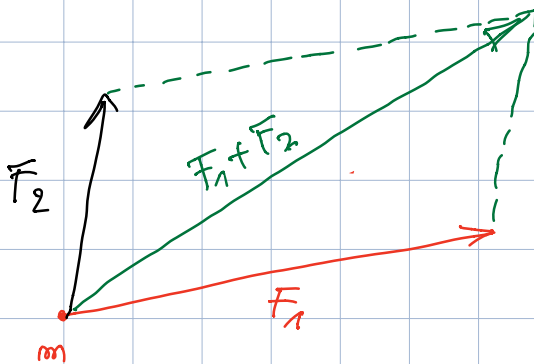


Algebra lineare

Idea: fare manipolazioni algebriche con oggetti geometrici

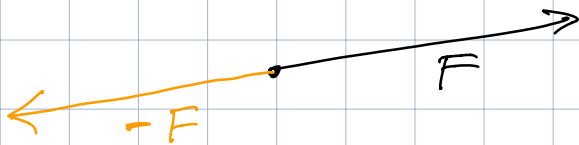
Oggetto principale: spazi vettoriali.

Esempio: forze applicate a un punto materiale nella meccanica.



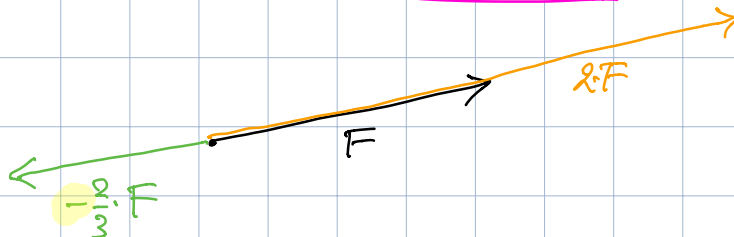
1. $\exists$ forza 0 t.c. $F + 0 = F$ elem. neutro 0

2. data forza F esiste $-F$ t.c. $F + (-F) = 0$
esistenza opposto



3. $F_1 + (F_2 + F_3) = (F_1 + F_2) + F_3$ associativa

4. $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$ commutativa



ya generale se F è forza e k è numero lo
 $k \cdot F$ forza.

$$5. k \cdot (F_1 + F_2) = k \cdot F_1 + k \cdot F_2$$

$$6. (k_1 + k_2) \cdot F = k_1 \cdot F + k_2 \cdot F$$

$$7. k_1 \cdot (k_2 \cdot F) = (k_1 \cdot k_2) \cdot F$$

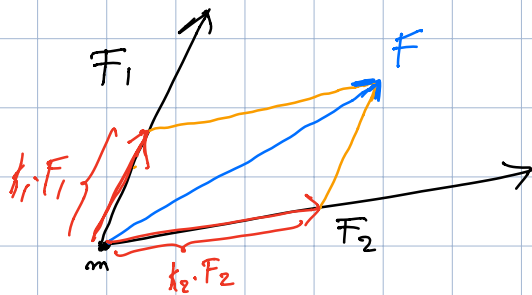
$$8. 1 \cdot F = F$$

} distrib

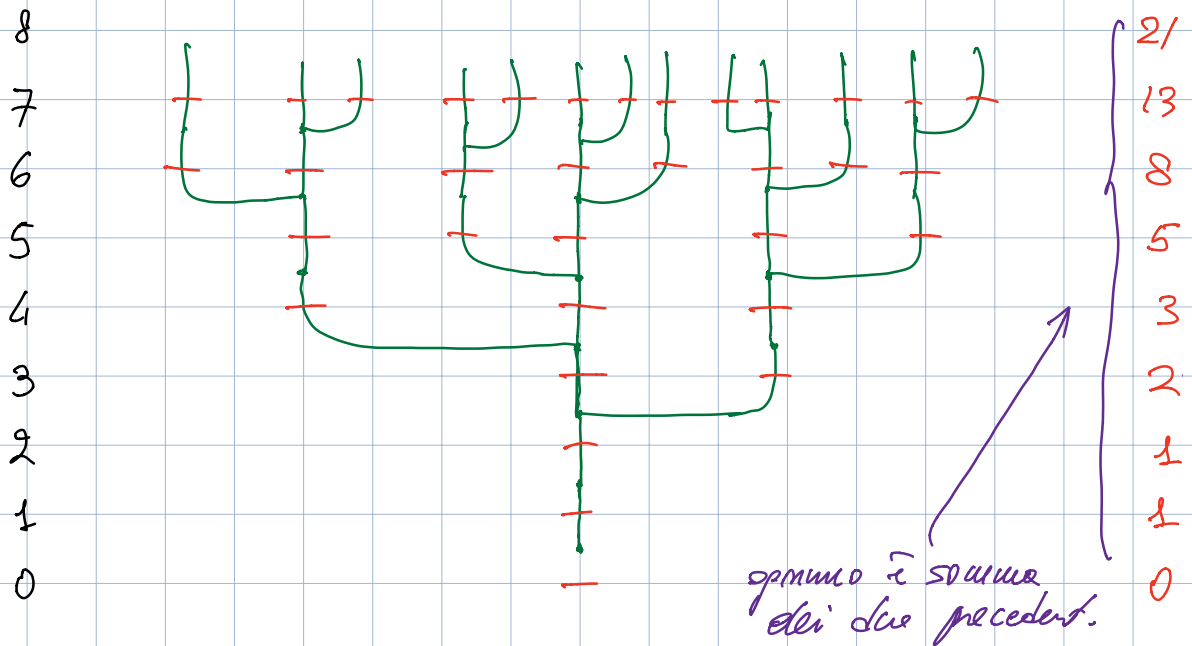
} assoc.

1 el neutro per d

Fatto: se scelgo applicante e m (nel piano)
due forze non nulle e non con la stessa direzione,
 F_1, F_2 allora ogni altra forza F si esprime
in modo unico come $F = k_1 \cdot F_1 + k_2 \cdot F_2$:



Numeri di Fibonacci: pianta un ramo a metà
 del mese 0; ogni mese successivo ogni ramo che non sia
 ancora matto getta un nuovo ramo (e lui continua a crescere):



Chiamo f_n il numero di Fibonacci n-esimo:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

regola di ricorrenza
 consente il calcolo di tutti gli f_n

Q: $f_{1000} = ?$

A: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

Facile: Dimostrarlo.

Interessante: capire perché le formule esiste
(teoria degli spazi vettoriali).

Numeri e operazioni

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ numeri naturali

Operazione binaria interne $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $(n, m) \mapsto n+m$

(funzioni)

$f: X \rightarrow Y$
 $x \mapsto f(x)$

dominio
simbolo funzione
codominio
simbolo che dice dove va un elemento x del dominio

Proprietà:

1. $m+0 = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

0 el. neutro

3. $m+(n+k) = (m+n)+k$

assoc.

4. $m+n = n+m$

commut.

Oss: dato $m \in \mathbb{N}$ l'equazione $m+x=0$ (incognita x)
ha soluzione in $\mathbb{N}$ solo per $m=0$ (e tale soluz.
è $x=0$)

Inventiamo gli opposti:

$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ interi relativi.

operaz. binaria interna di somma:

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(m, n) \longmapsto m+n$$

che estende quella di $\mathbb{N}$ e gode di:

1. $m+0 = 0$

2. $\forall m \in \mathbb{Z} \exists (-m) \text{ t.c. } m+(-m) = 0$ *esistente
opposto*

3. $m+(n+k) = (m+n)+k$

4. $m+n = n+m$

Su $\mathbb{Z}$ (e anche su $\mathbb{N}$) esiste altra operaz. binaria interna:

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(m, n) \longmapsto m \cdot n$$

che gode di:

5. $m \cdot 1 = m$

1 è neutro

7. $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

assoc.

8. $m \cdot n = n \cdot m$

commut.

9. $m \cdot (n+k) = m \cdot n + m \cdot k$

distrib.

Oss: dato $m \in \mathbb{Z}$ l'equazione $m \cdot x = 1$ nell'incognita x ha soluzione in $\mathbb{Z}$ solo per $m = \pm 1$ (e la soluz. è $x = m$)

Qoe: non ci sono inversi - *Li studieremo:*

Numeri razionali:

$$\mathbb{Q} \stackrel{«\rangle}{=} \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Att: $\frac{-9}{6} \quad \frac{15}{-10}$

sono diversi come numeri
ma uguali da razione
lo stesso numero

Convenzione: $\frac{m}{n} = \frac{h}{k}$ se $m \cdot k = n \cdot h$

Operazioni

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{h} = \frac{m \cdot h + n \cdot k}{n \cdot h}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{h} = \frac{m \cdot k}{n \cdot h}$$

Proprietà:

1. $a + 0 = a$

2. $\forall a \exists (-a) \text{ t.c. } a + (-a) = 0$

3. $a + (b + c) = (a + b) + c$

4. $a + b = b + a$

5. $a \cdot 1 = a$

6. $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \text{ t.c. } a \cdot a^{-1} = 1$

7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

8. $a \cdot b = b \cdot a$

9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

un insieme con una
op. binaria con
le proprietà
chiamate gruppo
commutativo.

quasi le stesse
proprietà del +
ripetute per il $\cdot$.
ma la 6 esclude 0

distributiva

escludere
caso per $\neq 0$

$$\text{in } \mathbb{Q}: \left(\frac{m}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{m}$$

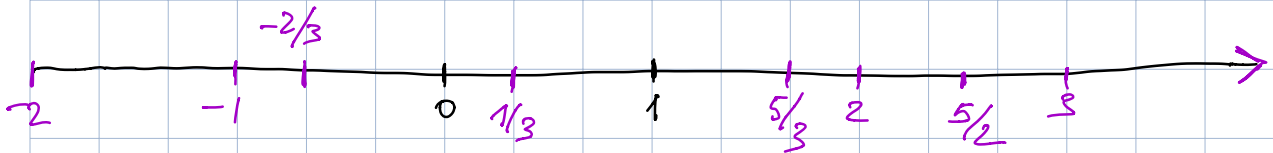
Conclusione: $\frac{m}{1} = m$ dunque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Fatto: un insieme con due oper. binarie interne $+$, $\cdot$ che soddisfano 1-9 si chiama campo.

Oss: i passaggi $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ hanno motivazione algebrica.

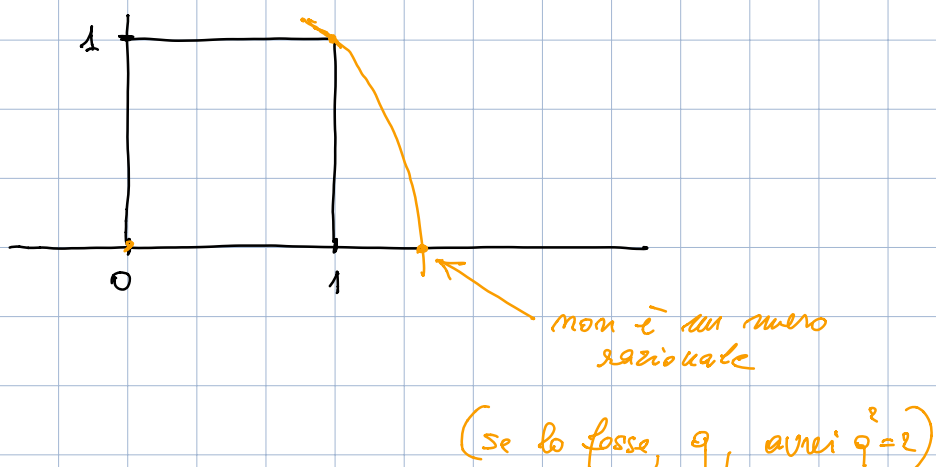
Altro passaggio $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ con altra motivazione (geometrica).

Fatto: se fisso su una retta due punti distinti che faccio corrispondere a $0, 1 \in \mathbb{Q}$, posso estendere questa corrispondenza su tutto $\mathbb{Q}$ e mi sottoriscrive della retta:



Fatto: tale sottoriscrive della retta identifica $\mathbb{Q}$ non è tutta la retta (restano fuori "molteplici punti").

Es:



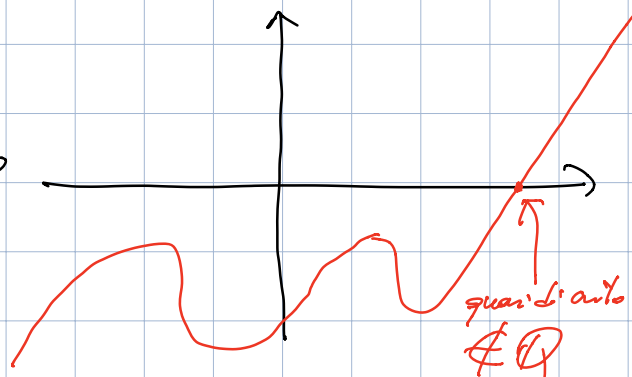
Ora definiamo $\mathbb{R}$ come "tutti i punti della retta". Fatti:

- le operazioni $+$, $\cdot$ si estendono da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$:
 $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- continuano a valere le 9 proprietà: $\mathbb{R}$ è un campo

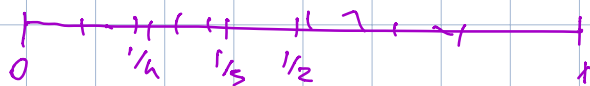
Curiosità: quali numeri in $\mathbb{R}$ non sono in $\mathbb{Q}$? (irrazionali)

- soluz. dell'eqnz. $x^2=2$
- tutte le soluz. non razionali di eqnz. polinomiali a coeff. interi:

$$7x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 11x + 9 = 0$$



Fatto: se scelgo un numero reale a caso ho probabilità 0 che esso sia soluzione di equaz. polinom. a coeff. interi (in part: probabilità 0 che sia razionale)



Polinomi a coeff. reali nelle indeterminate t :

$$\mathbb{R}[t] \stackrel{=}{=} \{a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_n \cdot t^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

$$\frac{9}{11} + \sqrt{2} \cdot t^2 \text{ non \u00e8 di questo tipo per\u00f2 lo identifichiamo a } \frac{9}{11} + 0 \cdot t + \sqrt{2} \cdot t^2$$

$$-\sqrt{5} + \pi \cdot t \quad -\sqrt{5} + \pi \cdot t + 0 \cdot t^2 \text{ sono scritture diverse per\u00f2 lo identifichiamo fra loro.}$$

Convenzione: posso aggiungere o togliere e moltiplicare monomi con coeff. 0.

Operazioni: $+$, $\cdot$

$$\left(9 + 7t + \frac{1}{4}t^2 - \sqrt{3}t^3\right) + \left(-\frac{1}{2} + 2t - t^2\right)$$

$$= -\frac{17}{2} + 9t - \frac{3}{4}t^2 - \sqrt{3}t^3$$

$$\left(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots + a_nt^n\right) + \left(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m\right)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot t + (a_2 + b_2) \cdot t^2 + \dots$$

complicato da scrivere.

Trucco: $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k$

summatoria
per k tra 0 e $+\infty$
($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$)

con convenzione
che $a_k = 0$
per $k > n$.
($t^0 = 1$)

Def: $\mathbb{R}[t] = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k : a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R} \right.$
moltiplicati da un certo punto in poi

Ora: $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) \cdot t^k$

$$(3 - 5t + 6t^2 - 4t^3)(2 + 8t - 9t^2)$$

$$= 6 + 24t - 27t^2 - 10t - 40t^2 + 45t^3$$

$$+12t^2 + 48t^3 - 56t^4 - 8t^3 - 32t^4 + 36t^5$$

$$= 6 + 14t - 57t^2 + 85t^3 + \dots$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{h=0}^k a_h \cdot b_{k-h} \right) t^k$$

$$(t^k = t^h \cdot t^{k-h} \quad h=0, \dots, k)$$

grado (deg) :

$$\deg(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) = n$$

quanti

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot t^k\right) = \max \{n : a_n \neq 0\}.$$

non funziona per il polinomio 0

convenzione : $\deg(0) = -\infty$.