"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Prova del 07/04/00

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se un vettore ha tutte le coordinate uguali tra loro in una certa base, lo stesso rimane vero cambiando base? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Un sistema lineare di 7 equazioni in 4 incognite può avere soluzione unica? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. Se $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, è vero che $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Data $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, l'insieme $\{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. Esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Può uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avere un numero finito di elementi?

$\boxed{\text{a}}$ Sì, se la dimensione è finita; $\boxed{\text{b}}$ sì, sempre; $\boxed{\text{c}}$ no, mai; $\boxed{\text{d}}$ sì, se la dimensione è nulla.

7. Siano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$. La dimensione di $U + W$ è:

$\boxed{\text{a}}$ 1; $\boxed{\text{b}}$ 2; $\boxed{\text{c}}$ 3; $\boxed{\text{d}}$ 4.

8. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$f(x,y,z) = (3x + k^2 - 1, -y + (k^2 - k)\cdot x^2)$. Per quanti valori di k la f_k è lineare?

$\boxed{\text{a}}$ Uno; $\boxed{\text{b}}$ due; $\boxed{\text{c}}$ nessuno; $\boxed{\text{d}}$ tutti.

9. Sia $f : V \to W$ lineare e sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Quale è vera su $f(v_1), \ldots, f(v_n)$?

$\boxed{\text{a}}$ Sono lin. indip.; $\boxed{\text{b}}$ generano W; $\boxed{\text{c}}$ generano $\mathrm{Im}(f)$; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

10. Una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{a}}$ è sempre iniettiva; $\boxed{\text{b}}$ è sempre surgettiva; $\boxed{\text{c}}$ può essere iniettiva; $\boxed{\text{d}}$ può essere surgettiva.

11. L'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ è:

$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix}1 & 1/2\\1/2 & 1\end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\2/3 & -1/3\end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}}$ A non è invertibile.

12. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\k\\k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-k\\0\\-k\end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale. Per quanti valori di k si ha che $V + W_k = \mathbb{R}^3$?

$\boxed{\text{a}}$ Tutti; $\boxed{\text{b}}$ nessuno; $\boxed{\text{c}}$ tutti meno uno; $\boxed{\text{d}}$ tutti meno due.

13. Quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$?

$\boxed{\text{a}}$ Una; $\boxed{\text{b}}$ due; $\boxed{\text{c}}$ infinite; $\boxed{\text{d}}$ nessuna.

14. Si considerino in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ i polinomi $p_1 = 1 + x$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x^3$. Quali sono le coordinate del polinomio $p = (1+x)^2$ rispetto a (p_1, p_2, p_3)?

$\boxed{\text{a}}$ $(1,0,0)^2$; $\boxed{\text{b}}$ $(1,2,1)$; $\boxed{\text{c}}$ $(1,2,0)$; $\boxed{\text{d}}$ (p_1, p_2, p_3) non è una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

15. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (0,1,1)$. Quali sono le coordinate del vettore v_1 rispetto a (v_1, v_2, v_3)?

$\boxed{\text{a}}$ $(1,1,0)$; $\boxed{\text{b}}$ $(1,0,0)$; $\boxed{\text{c}}$ $(0,0,1)$; $\boxed{\text{d}}$ $(0,1,0)$.

Il foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Deve essere esibito il libretto o un documento. Non è concesso alzarsi prima del termine né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date sul foglio fornito. Le domande V/F valgono ±3 punti, le altre +3/−1 punti. Le risposte omesse valgono 0. Va consegnato questo foglio.

1.♠ 2.♢ 3.♣ 4.♡ 5.♢ 6.♡ 7.♣ 8.♣ 9.♠ 10.♠ 11.♡ 12.♣ 13.♢ 14.♠ 15.♠

Risposte esatte

4. ♡ 7. ♣

1. F

2. V

3. F

4. V

5. F

6. d

7. c

8. a

9. c

10. c

11. c

12. d

13. d

14. d

15. b

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Prova del 07/04/00

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Pro-memoria delle risposte fornite (da non consegnare)

1. V F

2. V F

3. V F

4. V F

5. V F

6. a b c d

7. a b c d

8. a b c d

9. a b c d

10. a b c d

11. a b c d

12. a b c d

13. a b c d

14. a b c d

15. a b c d

1.♠ 2.♢ 3.♣ 4.♡ 5.♢ 6.♡ 7.♣ 8.♣ 9.♠ 10.♠ 11.♡ 12.♣ 13.♢ 14.♠ 15.♠