"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 18/5/00 (non fiscale)

Esercizio 1. Sia $V = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ è continua}\}$ e siano $f_1, f_2, f_3 \in V$ definite da $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, $f_3(t) = \cos(t)$. Sia $W = \mathrm{Span}\{f_1, f_2, f_3\}$. Siano $u_1(t) = t + \cos(t)$, $u_2(t) = 2t + t^2 - 2\cos(t)$, $u_3(t) = t - t^2 + 3\cos(t)$, $u_4(t) = -2 + 2t^2$.

(A) [2 punti] Provare che $u_i \in W$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(B) [3 punti] Determinare se u_1, u_2, u_3, u_4 siano linearmente indipendenti.

(C) [3 punti] Calcolare $\dim(W)$ trovare una base di W.

(D) [2 punti] Determinare se u_1, u_2, u_3, u_4 generino W.

(E) [2 punti] Calcolare le coordinate di u_1, u_2, u_3, u_4 rispetto alla base esibita in (C).

(F) [3 punti] V possiede una base? Se sì esibirne una, altrimenti dimostrare che non esiste.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sottospazio $W_k = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} \sin k \\ \cos k \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
Sia inoltre U il piano di equazione $x - y + \sqrt{2}z = 0$

(A) [4 punti] Per quanti valori di k si ha che W_k è contenuto in U?

(B) [4 punti] Per quali valori di k si ha che W_k è ortogonale ad U?

(C) Sia $A_k = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ lineare tale che } f(W_k) \text{ è ortogonale a } f(U)\}$.

  (i) [4 punti] Si dimostri che $A_{-\pi/4}$ è uno spazio vettoriale e si calcoli la sua dimensione.

  (ii) [3 punti] Si dimostri o si neghi con un controesempio che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme A_k è uno spazio vettoriale.

Esercizio 3. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. In V si considerino i sottospazi $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ e $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Sia inoltre $N = \{A \in V : \ A^2 = 0\}$.

(A) [3 punti] Si calcolino $\dim(W + U)$ e $\dim(W \cap U)$.

(B) [3 punti] Si dimostri o si neghi con un controesempio che $W \subset N$ e che $U \subset N$.

(C) [3 punti] Si dica se N è uno spazio vettoriale. Se sì se ne calcoli la dimensione e se ne esibisca una base.

(D) [3 punti] Si dimostri o si neghi con un controesempio che $N \subseteq W + U$ e che $N \supseteq W + U$.

(E) [3 punti] Si dimostri o si neghi con un controesempio la seguente affermazione: *se $A \in V$ è tale che $A^3 = 0$ allora anche $A^2 = 0$.*

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, sia f un endomorfismo di V, e sia W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$. Sia g l'endomorfismo di W definito dalla restrizione di f.

(A) [8 punti] Si dimostri che il polinomio caratteristico di g divide quello di f, e si descriva il caso nel quale i due polinomi sono uguali.

(B) [7 punti] Si dimostri che il polinomio minimo di g divide quello di f, e si descriva il caso nel quale i due polinomi sono uguali.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.