UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 16/6/00

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ e siano $p_1(x) = (x+1)(x-2),\ p_2(x) = x(x-1),\ p_3(x) = x^2,\ p_4(x) = 1+x,\ p_5(x) = x^2 + (x-1)^2$.

(A) [3 punti] p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 generano V? Se sì estrarre da $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ una base di V, altrimenti estrarre da $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ una base di $\mathrm{Span}\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ e poi estenderla ad una base di V.

(B) [3 punti] Calcolare le coordinate di $1 + x + x^2 + x^3$ rispetto alla base di V trovata nel punto (A).

(C) [3 punti] Detti $W = \mathrm{Span}\{p_1, p_2, p_5\}$ e $U = \mathrm{Span}\{p_3, p_4\}$, calcolare le dimensioni di $W,\ U,\ W+U,\ W \cap U$.

(D) [3 punti] Trovare un sottospazio Z di V tale che $(W \cap U) \oplus Z = V$.

(E) [3 punti] Sia $p_0 \in W \cap U$, con $p_0 \neq 0$. Dimostrare o contraddire con un controesempio la seguente affermazione: $V = (W \cap U) \oplus Z$ *se e solo se* Z *è un sottospazio di* V *di dimensione 3 tale che* $p_0 \notin Z$.

Esercizio 2. Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$ e sia $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

(A) [3 punti] Si calcoli la dimensione di W e se ne esibisca una base.

(B) [3 punti] Si scrivano equazioni cartesiane e parametriche di $W^\perp$.

(C) [3 punti] Si dimostri che esiste una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(W) \subset W$ e $\varphi(W^\perp) \subset W^\perp$.

(D) [3 punti] Si dimostri che esiste una applicazione lineare φ con le proprietà del punto (C) ed in più tale che:

- φ ristretta a W sia l'identità, cioè $\varphi(x) = x\ \forall x \in W$,
- φ ristretta a $W^\perp$ sia opposta all'identità, cioè $\varphi(x) = -x\ \forall x \in W^\perp$.

(E) [3 punti] Si dica se una φ come nel punto (D) sia unica. Se sì se ne scriva la matrice rispetto ad una base a scelta. Se no se ne esibiscano due distinte.

Esercizio 3. Al variare del parametro complesso α sia $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ \alpha & 1 & i-1 & 2i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ i-1 & i & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

(A) [4 punti] Si calcoli il rango di A_α al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$.

(B) [4 punti] Per $\alpha = 0$ si calcoli la prima colonna dell'inversa di A_0 (se A_0 è invertibile).

(C) [4 punti] Si dica per quali valori di α il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ è un autovettore di A_α, e si determini il relativo autovalore λ_α.

(D) [3 punti] Per ognuno degli α trovati nel punto (C), si determini la dimensione dell'autospazio relativo a λ_α. Si scriva inoltre il polinomio caratteristico di A_α.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 5, sia f un endomorfismo di V e sia v un vettore non nullo di V tale che $f(v) = 3v$. In ciascuno dei casi seguenti si descrivano tutte le possibili forme canoniche di Jordan per f.

(A) [5 punti] Il polinomio minimo di f è un multiplo di $(t+3)^3$.

(B) [5 punti] Il polinomio $(t+3)^3$ è un multiplo del polinomio minimo di f.

(C) [5 punti] Il polinomio minimo di f vale $(t-3)^3$.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.