"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 8/7/00

Esercizio 1. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V$. Sia $W = \{A \in V : \ AM = MA\}$.

(A) [3 punti] Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V.

(B) [3 punti] Calcolare la dimensione di W ed esibirne una base.

(C) [3 punti] Estendere la base trovata nel punto (B) ad una base di V e calcolare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in tale base.

(D) [3 punti] È vero che tutte le matrici non nulle in W sono invertibili? Se sì dimostrarlo, altrimenti fornire n controesempio.

(E) [3 punti] Sia $U = \{A \in V : \ A^n \cdot M = M \cdot A^n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcolare la dimensione di U ed esibirne una base.

Esercizio 2. Per $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ siano $f_A, \ g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite come segue:

$$f_A(X, Y) = \langle X | AY \rangle \qquad g_A(X, Y) = \langle AX | AY \rangle.$$

(A) [4 punti] Per $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si dica se f_A e g_A sono prodotti scalari.

(B) [4 punti] Si caratterizzino le matrici dell'insieme $\mathcal{F} = \{A : \ f_A \text{ è un prodotto scalare}\}$.

(C) [3 punti] Si caratterizzino le matrici dell'insieme $\mathcal{G} = \{A : \ g_A \text{ è un prodotto scalare}\}$.

(D) Si dimostri o si neghi con un controesempio che:

(i) [2 punti] $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$;

(ii) [2 punti] $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale k, sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & 1-k & 1 \end{pmatrix}$

(A) [3 punti] Si dica quante soluzioni ha il sistema $A_k x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(B) [3 punti] Per $k = 1$ sia W lo spazio delle soluzioni di $A_1 x = 0$. Si dimostri che l'insieme $V = \{B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \; Bx = 0 \; \forall x \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(C) [3 punti] Si calcoli la dimensione di V.

(D) [3 punti] Sia $U = \{B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \; Bx = 0 \Leftrightarrow x \in W\}$. Si dimostri che $U \subset V$ e che U non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(E) [3 punti] Si caratterizzino le matrici di U.

Esercizio 4. Sia X lo spazio delle matrici reali 2×2, e sia $B_k = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di k in $\mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo f_k di X definito da $f_k(A) = {}^{t}A \cdot B_k$.

(A) [5 punti] Si dica per quali k la f_k sia invertibile, e si dia una formula per l'inversa.

(B) [5 punti] Al variare di k, si dica se f_k sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

(C) [5 punti] Per $k = 0, 1, -1$ si descriva esplicitamente una base di X (o del corrispondente spazio sui complessi) nella quale la f_k assume la sua forma canonica.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.