"Geometria e Algebra" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 16/9/00

Esercizio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ i & 2i & 1 & i-2 \\ 0 & -1 & i & -i \\ -i & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$.

(A) [5 punti] Determinare il rango di A.

(B) [3 punti] Esibire una base di Ker$A$.

(C) [3 punti] Estendere la base del punto (B) ad una base di $\mathbb{C}^4$ usando vettori ortogonali a Ker$A$ rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^4$.

(D) [2 punti] Ortonormalizzare la base trovata nel punto (C).

(E) [2 punti] Calcolare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base del punto (D).

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ e sia $f : V \to V$ definita da $f(p(x)) = p(0) \cdot x^3 + p'(1) \cdot x^2 + p''(2) \cdot x$, dove l'apice indica l'operazione di derivazione.

(A) [2 punti] Dimostrare che f è lineare.

(B) [4 punti] Determinare il nucleo e l'immagine di f.

(C) [3 punti] Scrivere la matrice di f rispetto ad una base a scelta di V.

(D) [4 punti] Determinare gli autovalori di f.

(E) [2 punti] Dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(A) [4 punti] Per quali t la $M(t)$ è invertibile?

(B) [2 punti] Per quali t si ha $\det(M(t)) > 0$?

(C) [3 punti] Per quali t la $M(t)$ è ortogonale?

(D) [3 punti] Per quali t la $M(t)$ è diagonalizzabile?

(E) [3 punti] Esiste una famiglia di matrici $A(t)$ tale che i coefficienti $a_{ij}(t)$ siano funzioni continue di t, tale che $A(0) = M(0)$, $A(\frac{\pi}{2}) = M(\frac{\pi}{2})$ e tale che $\det(A(t)) \neq 0$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$?

Esercizio 4. Sia f un endomorfimso di $\mathbb{C}^5$ per il quale esista un vettore v non nullo tale che $f(v) = 2v$. Si indichino con $\mu_f(t)$ e $p_f(t)$ rispettivamente il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di f. In ciascuno dei seguenti casi si elenchino tutte le possibili forme canoniche di Jordan per f:

(A) [5punti] $\mu_f(t)$ è un multiplo di t^3.

(B) [5punti] $\mu_f(t)$ è un divisore di $t(t-2)$.

(C) [5punti] $p_f(t)$ è un multiplo di $t(t^2-1)$.

L'esercizio 4 è riservato agli studenti che sostengono l'esame annuale (a.a. 1998/1999). Questi studenti devono inoltre risolvere due a scelta dei primi tre esercizi. Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.