UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 8/1/2000

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con bordo $\partial S$, e sia $\omega$ una 1-forma su $\mathbb{R}^3$ tale che $\omega = 0$ su $\partial S$. Si può concludere che $\int_S \mathrm{d}\omega = 0$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**2.** Sia $f_n(t) = \mathrm{e}^{n(it-n)}$ per $t \in [0,1]$. Sono soddisfatte per la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ le ipotesi del criterio di derivabilità termine a termine? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**3.** Siano $x, y, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni con derivata continua. Sia $x'(t) = f(x(t))$ e $y'(t) = f(y(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $x(0) < y(0)$. Si può concludere che $x(t) < y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**4.** La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\mathrm{e}^{in}+2n^3} z^n$ converge su tutto $\mathbb{C}$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**5.** La singolarità in $z = 0$ della funzione $\sin(1/z) - 1/z$ è eliminabile? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**6.** È vero che se $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ è continua e limitata allora la sua trasformata di Laplace è definita su tutto $\mathbb{C}$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

**7.** Sia $f(x,y) = \sqrt{1+y^2}$ e $\alpha(t) = (t, \mathrm{e}^t)$ per $t \in [0,1]$. Quanto fa $\int_\alpha f$?
$\boxed{\mathrm{a}}$ $1/2 + \mathrm{e}^2$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $(1+\mathrm{e}^2)^{1/2}$; $\boxed{\mathrm{c}}$ $(1+\mathrm{e}^2)/2$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $1 + \mathrm{e}^2/2$.

**8.** La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x,y,z) = (\,\mathrm{e}^{y^2+x-z},\ \mathrm{e}^z \cdot \cos(x) \cdot \cos(y),\ \mathrm{e}^y)$
$\boxed{\mathrm{a}}$ ha inversa $\mathrm{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$; $\boxed{\mathrm{b}}$ ha inversa non $\mathrm{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$;
$\boxed{\mathrm{c}}$ ha inversa locale $\mathrm{C}^1$ nell'intorno di $(0,0,0)$; $\boxed{\mathrm{d}}$ ha inversa locale non $\mathrm{C}^1$ nell'intorno di $(0,0,0)$.

**9.** Come si comportano nell'intorno di $(0,0)$ le soluzioni $t \mapsto (x(t), y(t))$ del sistema $\begin{cases} x' = x^2 + \sin(y) \\ y' = \sin(x+y) \end{cases}$ ?
$\boxed{\mathrm{a}}$ tendono tutte ad avvicinarsi a $(0,0)$; $\boxed{\mathrm{b}}$ tendono tutte ad allontanarsi da $(0,0)$;
$\boxed{\mathrm{c}}$ sono tutte periodiche; $\boxed{\mathrm{d}}$ nessuna delle precedenti.

**10.** Sia $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione tale che per ogni $n$ si abbia $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$, ed inoltre $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$. Quanto fa $a_{100}$? $\boxed{\mathrm{a}}$ 0; $\boxed{\mathrm{b}}$ 2; $\boxed{\mathrm{c}}$ 1; $\boxed{\mathrm{d}}$ $-1$.

**11.** Se $f(z) = 1/\cos(z)$, quanto fa $\int_{\partial\Delta(0,2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$? $\boxed{\mathrm{a}}$ $-i\pi$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $-4i\pi$; $\boxed{\mathrm{c}}$ $i\pi$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $4i\pi$.

**12.** Se $f(t) = \mathrm{e}^{3it/2}$, quale affermazione sui coefficienti di Fourier $(\alpha_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ di $f$ è giusta?
$\boxed{\mathrm{a}}$ sono tutti nulli; $\boxed{\mathrm{b}}$ tutti meno uno sono nulli;
$\boxed{\mathrm{c}}$ sono tutti reali; $\boxed{\mathrm{d}}$ sono tutti immaginari puri.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono $\pm 2$ punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 8/1/2000

# Risposte esatte

**1.** V
**2.** V
**3.** V
**4.** F
**5.** F
**6.** F
**7.** c
**8.** c
**9.** d
**10.** a
**11.** b
**12.** c