UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 29/1/2000

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. La forma $\omega(x,y) = y\sin(x)\,\mathrm{d}x + (\cos(y) - \cos(x))\,\mathrm{d}y$ è chiusa? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Sia C la curva nel piano di equazione $\log(1 + x\cdot\cos(y)) + \cos(x) = 1$. Il vettore $(1,1)$ è tangente a C nel punto $(0,0)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. La soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} 2\cdot x\cdot x' = \sin(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Siano $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ soluzioni della medesima equazione alle differenze $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + n\cdot x_n$. Sapendo che $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, si può concludere che $a_0 = b_0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. Se $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $\overline{f}$ è olomorfa, è vero che $f\,\mathrm{d}\overline{z}$ è chiusa? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Se $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t$, è vero che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin(4n) = 4$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Siano $\sigma_+, \sigma_- : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^2$ date da $\sigma_\pm(u,v) = (u, v, \pm(1-u^2)(1-v^2))$. Se ω è una 2-forma chiusa su $\mathbb{R}^3$ i numeri $\int\limits_{\sigma_+}\omega$ e $\int\limits_{\sigma_-}\omega$:

$\boxed{\text{a}}$ sono sempre entrambi nulli; $\boxed{\text{b}}$ sono sempre uguali tra loro;
$\boxed{\text{c}}$ sono sempre opposti tra loro; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

8. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$

$\boxed{\text{a}}$ converge assolutamente; $\boxed{\text{b}}$ converge ma non assolutamente, ed ha somma 0;
$\boxed{\text{c}}$ converge ma non assolutamente, ed ha somma positiva; $\boxed{\text{d}}$ non converge.

9. Sia x la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x' = x - \mathrm{e}^t \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Quanto fa $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$?

$\boxed{\text{a}}$ un valore finito; $\boxed{\text{b}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{c}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{d}}$ non esiste.

10. Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ha un polo in ∞ e $g(w) = \frac{1}{f(1/w)}$, che tipo di punto è 0 per g?

$\boxed{\text{a}}$ uno zero; $\boxed{\text{b}}$ una singolarità eliminabile con valore non nullo;
$\boxed{\text{c}}$ una singolarità essenziale; $\boxed{\text{d}}$ un polo.

11. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $f \in \mathcal{H}(\Delta \setminus \{0\})$. Per quali z converge la parte principale dello sviluppo di Laurent di f in 0?

$\boxed{\text{a}}$ per $|z| < 1$; $\boxed{\text{b}}$ per $0 < |z| < 1$; $\boxed{\text{c}}$ per $|z| > 1$; $\boxed{\text{d}}$ per $|z| > 0$.

12. Se $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ e $\varphi = \mathcal{F}(f)$ è la trasformata di Fourier di f, quanto fa $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t$?

$\boxed{\text{a}}$ $2\pi^{3/2}$; $\boxed{\text{b}}$ $-2\pi^{3/2}$; $\boxed{\text{c}}$ 0; $\boxed{\text{d}}$ $+\infty$.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. V
2. F
3. V
4. F
5. V
6. F
7. b
8. c
9. c
10. a
11. d
12. a