UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

# "MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 16/6/00

**Nome** __________ **Cognome** __________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** Esiste $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, che non sia del tipo $f(z) = az + b$, tale che $f(z)$ è reale per ogni $z$ immaginario puro? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**2.** Se $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ è continua e $f(t) = 0$ per $t \geq 1$, si può concludere che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**3.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$. Siano $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione $x'' = f(t, x)$. Se $x_1(0) < x_2(0)$ si può concludere che $x_1(t) < x_2(t)$ per ogni $t$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**4.** Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che in ogni punto il determinante della sua matrice jacobiana è non nullo, si può concludere che $f$ è bigettiva? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**5.** La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k+1}$ converge? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato. È vero che $\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}f = 0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**7.** Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una successione che soddisfa la relazione $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ per $n \geq 0$. Si supponga che $a_{17} = a_{18} = 0$. Quali sono le condizioni minime su $\alpha$ e $\beta$ che consentono di concludere che $a_n = 0$ per ogni $n$?
$\boxed{\text{A}}$ Nessuna condizione; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha \neq 0$; $\boxed{\text{C}}$ $\beta \neq 0$; $\boxed{\text{D}}$ $\alpha \neq 0$ oppure $\beta \neq 0$.

**8.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la soluzione $x_k$ del problema $\begin{cases} x' = t^2 \cdot x \\ x(0) = k \end{cases}$. Quale è vera su $\lim_{t \to -\infty} x_k(t)$?
$\boxed{\text{A}}$ esiste per ogni $k$ e dipende da $k$; $\boxed{\text{B}}$ esiste per ogni $k$ e fa sempre 0;
$\boxed{\text{C}}$ esiste solo per alcuni $k$; $\boxed{\text{D}}$ esiste per ogni $k$ e fa sempre 1.

**8.** Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si può concludere che $f \equiv 0$ sapendo che:
$\boxed{\text{A}}$ $f(0) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $f(k) = 0$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\boxed{\text{C}}$ $f(1/k) = 0$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\boxed{\text{D}}$ $f'(0) = 0$

**10.** Se $\omega(x, y, z) = z(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - x^2 - y^2\}$, quanto fa $\int_S \mathrm{d}\omega$?
$\boxed{\text{A}}$ $2\pi$ $\boxed{\text{B}}$ $4\pi$ $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 0

**11.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se le trasformate di Fourier $f_1 = \mathcal{F}(f)$ e $f_2 = \mathcal{F}(f_1)$ sono definite, è vero che $f = 2\pi f_2$? $\boxed{\text{A}}$ Sì, sempre; $\boxed{\text{B}}$ solo se $f = 0$; $\boxed{\text{C}}$ solo se $f$ è pari; $\boxed{\text{D}}$ solo se $f$ è dispari.

**12.** Qual è il minimo della funzione $x^2 + y^2$ sulla curva di equazione $y^2 + x + 1 = 0$?
$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-1$ $\boxed{\text{D}}$ $\pi$

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono $\pm 2$ punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

# Risposte esatte

**1.** V
**2.** V
**3.** F
**4.** F
**5.** V
**6.** V
**7.** D
**8.** B
**9.** C
**10.** D
**11.** C
**12.** B