UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 8/7/00

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineare fratta tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(i) = i$. Si può concludere che f è l'identità? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0) = 0$ ed il differenziale in 0 di f ha rango 2. L'insieme $f^{-1}(0)$ è una curva nell'intorno di 0? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. La forma $(x^2 + 2xyz^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x^2z^2 + xy^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (z^3y - 3x^2yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ è chiusa? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Si consideri un'equazione differenziale del tipo $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1x^{(1)} + a_0x = 0$, dove $x^{(i)}$ è la derivata i-esima e $a_i \in \mathbb{C}$ per $i < n$. È vero che se $n \geq 2$ essa ammette sempre una soluzione non costante? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. Se f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed ha una singolarità essenziale in 0, può $|f(x)|$ essere limitato al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $f^{(n)}$ è la derivata n-esima. È vero che $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Quanto fa $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$? $\boxed{\text{A}}$ π; $\boxed{\text{B}}$ 2π; $\boxed{\text{C}}$ $\pi/2$; $\boxed{\text{D}}$ $\pi/4$.

8. Si consideri una successione $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ e $a_{n+2} = a_{n+1}/(a_n)^2$ per $n \geq 0$. Per quali $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la successione $(\lambda a_n)_{n=0}^{\infty}$ soddisfa le stesse proprietà?
$\boxed{\text{A}}$ Per tutti i $\lambda \neq 0$; $\boxed{\text{B}}$ per $\lambda = +1$ e per $\lambda = -1$;
$\boxed{\text{C}}$ per $\lambda = i$ e per $\lambda = -i$; $\boxed{\text{D}}$ per nessun λ.

9. Sia $f(z) = 1/(1 - z)$ e si consideri il suo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto i. Qual è il raggio di convergenza di tale serie? $\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 1/2; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $1/\sqrt{2}$.

10. Sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Quanto fa $\int_{\partial Q}((x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y)$?
$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{e} - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $(\mathrm{e} - 1)^{-1}$; $\boxed{\text{D}}$ $(\mathrm{e} - 1)^2$.

11. Sia $f(t) = t + |t|$ e siano $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ i coefficienti di Fourier di f (rispetto ai coseni ed ai seni rispettivamente). Quale è giusta?
$\boxed{\text{A}}$ $a_n = 0$ per ogni n; $\boxed{\text{B}}$ $b_n = 0$ per ogni n;
$\boxed{\text{C}}$ $a_n = b_n = 0$ per $n \geq 10$; $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti.

12. Sia $x = x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x' = (x/t)^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$ Quanto fa $\lim_{t\to\infty} x(t)/t$?

$\boxed{\text{A}}$ Non è definito; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ 0.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 8/7/00

Risposte esatte

1. V
2. V
3. F
4. V
5. V
6. V
7. c
8. b
9. c
10. b
11. d
12. b