UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 2/9/00

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \neq 0$. Se $f(e^{i\vartheta} z_0) = f(z_0)$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$, si può concludere che f è costante? [V] / [F]

2. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'' = (1 + x + x' + t)^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

La soluzione nell'intorno di 0 è unica? [V] / [F]

3. Siano $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$ per $t \in [0, 2\pi]$ e $\beta(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 4t^2)$ per $t \in [0, \pi]$. È vero che la curva α è più lunga della curva β? [V] / [F]

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n) - n)/n^2$ è convergente? [V] / [F]

5. È vero che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2i}$ ha modulo maggiore di 1? [V] / [F]

6. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, nulle fuori da $[-2, 2]$ e uguali tra loro su $[-1, 1]$. Se $F = \mathcal{F}(f)$ e $G = \mathcal{F}(g)$ sono le trasformate di Fourier, è vero che $F'(0) = G'(0)$? [V] / [F]

7. Siano $f(x, y) = y\cos(x^2)$ e $\alpha(t) = (\cos(t), \sin^2(t))$ per $t \in [0, \pi/2]$. Quanto fa $\int_\alpha df$?
[A] 1. [B] -1. [C] π. [D] 0.

8. Quanto fa $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)}$? [A] $2\pi i$. [B] 0. [C] πi. [D] 1.

9. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una successione che soddisfa le relazioni $\begin{cases} a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n, \\ a_0 = 0,\ a_1 = -2,\ a_2 = -2 \end{cases}$. Quanto fa a_{75}?
[A] 0. [B] 2. [C] -2. [D] $-2i$.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica. Siano $\alpha_n(f)$ e $\alpha_n(\overline{f})$ i coefficienti di Fourier di f e della sua coniugata, per $n \in \mathbb{Z}$. Quale è vera?
[A] $\alpha_n(\overline{f}) = -\alpha_n(f)$. [B] $\alpha_n(\overline{f}) = -\overline{\alpha_{-n}(f)}$. [C] $\alpha_n(\overline{f}) = \overline{\alpha_{-n}(f)}$. [D] $\alpha_n(\overline{f}) = -\overline{\alpha_n(f)}$.

11. Siano $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^∞ convergenti uniformemente a f in $[0, 1]$. Quale delle seguenti è vera su f? [A] Può non essere di classe C^1. [B] È di classe C^∞.
[C] È di classe C^1 ma non C^∞. [D] Può non essere continua.

12. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = \sin(1 - x^2 - y^2)\}$ e $\omega(x, y, z) = (1 + e^z)\, dx\, dz$. Quanto fa $\int_S \omega$? [A] e^π. [B] 1. [C] $e^{-\pi}$. [D] 0.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ±2 punti, le altre +3/−1 punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. V
2. F
3. F
4. F
5. V
6. F
7. A
8. B
9. A
10. C
11. A
12. D