"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 29/1/2000

Esercizio 1. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ e $f : \Delta \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Delta$.

(a) [4 punti] Dimostrare che per ogni $z_0 \in \Delta$ esiste $r > 0$ tale che la f ristretta a $\{z \in \Delta : \ |z - z_0| < r\}$ è iniettiva.

(b) [4 punti] Dimostrare che la f può non essere iniettiva su tutto Δ.

(c) [4 punti] Dimostrare che la f è iniettiva su tutto Δ se è un polinomio di grado 2. [Suggerimento: ragionare per assurdo e considerare prima il caso in cui il valore assunto due volte è 0.]

(d) [3 punti] Esibire, se esiste, una f come nelle ipotesi per la quale esistono successioni $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ di punti di Δ tutti distinti tra loro tali che $f(z_n) = f(w_n)$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} |z_n - w_n| = 0$. [Suggerimento: osservare che le successioni possono non convergere a un punto di Δ.]

Esercizio 2. Per $r > 0$ si consideri l'equazione differenziale $u'' = r \cdot ((u')^2 - 1)$ con $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ due volte derivabile, $u = u(t)$.

(a) [4 punti] Trovare le soluzioni dell'equazione (come primitive di funzioni esplicite)

Si supponga d'ora in poi fissato $r > 0$ e si supponga che per tale r esista una soluzione U dell'equazione tale che $U(-1) = U(+1) = 0$.

(b) [4 punti] Provare che U ha un unico punto di massimo relativo interno all'intervallo $(-1, 1)$.

(c) [4 punti] Dimostrare che ogni altra soluzione u con $u(-1) = u(+1) = 0$ coincide con U. [Suggerimento: confrontare $u'(-1)$ e $U'(-1)$.]

(d) [3 punti] Usando i punti (b) e (c) trovare il punto di massimo relativo di U (non il valore assunto da U). [Suggerimento: usare la la simmetria del problema.]

[Nella soluzione dei punti (c) e (d) lo studente può assumere come veri i punti precedenti, anche se non è riuscito a dimostrarli.]

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente formule ed enunciati. Consegnando lo scritto si perde il diritto a ottenere la registrazione del voto conseguito nei quiz. Se si consegna lo scritto e la media dei voti di quiz e scritto è meno di 16, bisogna ripetere il quiz.