UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 18/12/1999

**Nome** ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** È vero che la curva in $\mathbb{R}^2$ di equazione $(|x|-2)^2+y^2=1$ ha lunghezza $2\pi$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**2.** L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t)=x(t)^2-t^2\cdot x'(t)$ è uno spazio vettoriale? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**3.** Se $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ e $f(-z)=f(z)$ per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, il residuo di $f$ in 0 è necessariamente nullo? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**4.** Se $\Omega\subset\mathbb{C}$ è aperto e $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, anche $2(f\cdot f')^2$ appartiene a $\mathcal{H}(\Omega)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**5.** Se $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ha una singolarità essenziale all'infinito, può $f$ non annullarsi mai? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**6.** Per $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{C}$ sia $\langle\alpha|\beta\rangle=\int\limits_0^1\overline{\alpha(t)}\beta(t)\,\mathrm{d}t$ (quando l'integrale esiste). Sia $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ una funzione continua. Sapendo che $\langle f|\chi_{[a,b]}\rangle=0$ per ogni $[a,b]\subset[0,1]$, si può concludere che $f$ è identicamente nulla? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**7.** Sia $f(x,y,z)=(x-y,x^2+2y^2+3y^2-1)$. L'insieme $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=(0,0)\Big\}$ è:

$\boxed{\text{a}}$ una superficie ; $\boxed{\text{b}}$ una curva;
$\boxed{\text{c}}$ unione di una curva e di una superficie; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

**8.** Per quali $z\in\mathbb{C}$ converge la serie di Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(nz)^n$?

$\boxed{\text{a}}$ per $|z|>0$; $\boxed{\text{b}}$ per ogni $z\in\mathbb{C}$; $\boxed{\text{c}}$ per $|z|<1$; $\boxed{\text{d}}$ per $|z|>1$.

**9.** Quanto fa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$? $\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ $\pi/2$; $\boxed{\text{c}}$ $\pi$; $\boxed{\text{d}}$ $2\pi$.

**10.** Sia $f(x)=\cos(x^2)+\sin(x^2)$ e siano $(a_n)_{n\geq0}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ coefficienti di Fourier di $f$ (gli $a_n$ rispetto ai coseni ed i $b_n$ rispetto ai seni). Quale è giusta?

$\boxed{\text{a}}$ tutti gli $a_n$ sono nulli; $\boxed{\text{b}}$ $a_n^2+b_n^2=0$ per $n\gg0$ ;
$\boxed{\text{c}}$ tutti i $b_n$ sono nulli; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

**11.** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ due volte derivabile con $f$, $f'$, e $f''$ assolutamente integrabili. Siano $\varphi=\mathcal{F}(f)$ e $\psi=\mathcal{F}(f'')$ le trasformate di Fourier. Sia $\varphi(1)\neq0$. Quanto fa $\psi(1)/\varphi(1)$?

$\boxed{\text{a}}$ 1; $\boxed{\text{b}}$ $i$; $\boxed{\text{c}}$ $-1$; $\boxed{\text{d}}$ $-i$.

**12.** Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è pari ed ammette trasformata di Fourier $\varphi=\mathcal{F}(f)$, quanto fa $(\mathcal{F}(f^2))(0)$?

$\boxed{\text{a}}$ $\varphi(0)$; $\boxed{\text{b}}$ $\varphi(0)^2$; $\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$; $\boxed{\text{d}}$ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono $\pm2$ punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

# Risposte esatte

**1.** F
**2.** F
**3.** V
**4.** V
**5.** V
**6.** V
**7.** b
**8.** a
**9.** b
**10.** c
**11.** c
**12.** d