"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 27/10/99 (non fiscale)

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. L'applicazione $\Phi : \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da $\Phi(f) = (f(1) - f(0))^2$ è lineare? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia D^2 il disco $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, e $n = (n_1, n_2)$ la sua normale esterna lungo ∂D^2. È sempre vero che $\int_{\partial D^2} (f(x_1)n_1 + f(x_2)n_2) = 0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. Sia $v(x,y) = (\sin(\pi \cdot x) \cdot \log(1 + x^2 + y^2), y^2 \cdot \cos(\pi \cdot x))$ e $Q = [0,1] \times [0,1]$.
È vero che $\int_Q \mathrm{div}(v) = 0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Sia S una superficie non orientabile in $\mathbb{R}^3$ (ad esempio il nastro di Möbius). È sempre vero che se facciamo un buco ad S (cioè rimuoviamo un punto ed un suo piccolo intorno) essa rimane non orientabile? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. È vero o falso che l'integrale di una qualsiasi 2-forma di classe C^1 su una superficie senza bordo in $\mathbb{R}^3$ è nullo? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y,z) = (y^2 + x + z, (x+1)z)$. Si può applicare a f nel punto $(0,0,0)$ il teorema del Dini? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Quale matrice è associata alla forma bilineare $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y),(x,y)) = -y^2 + 2xy$?
$\boxed{\text{a}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\partial f/\partial x(0,0) = \partial f/\partial y(0,0) = 0$ e $(H(f))(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Che tipo di punto è $(0,0)$ per f?
$\boxed{\text{a}}$ un minimo locale; $\boxed{\text{b}}$ un massimo locale; $\boxed{\text{c}}$ né un minimo locale né un massimo locale;
$\boxed{\text{d}}$ le informazioni non consentono di stabilire alcuna delle precedenti.

9. Quanto è lunga la curva $\alpha(t) = (t, t^2/2)$ con $t \in [0,1]$?
$\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ 2; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

10. La forma $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ è il differenziale di una funzione?
$\boxed{\text{a}}$ sì, della funzione $f(x,y) = x + y$; $\boxed{\text{b}}$ sì, della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$;
$\boxed{\text{c}}$ sì, della funzione $f(x,y) = (x^2 + y^2)/2$; $\boxed{\text{d}}$ no.

11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Sia

$$S = \Big\{(t, f(t) \cdot \sin(\vartheta), f(t) \cdot \cos(\vartheta)) : \ t \in \mathbb{R}, \ 0 \leq \vartheta < 2\pi\Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

In quale caso l'insieme S è una superficie?
$\boxed{\text{a}}$ quando $f(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{b}}$ quando $f'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{c}}$ sempre ; $\boxed{\text{d}}$ mai.

12. Quanti punti critici ha la funzione e^{x+y} sulla curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel piano?
$\boxed{\text{a}}$ nessuno; $\boxed{\text{b}}$ uno; $\boxed{\text{c}}$ due; $\boxed{\text{d}}$ quattro.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 27/10/99 (non fiscale)

Risposte esatte

1. F

2. F

3. V

4. V

5. F

6. V

7. b

8. c

9. d

10. c

11. a

12. c