UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 10/11/99 (non fiscale)

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** La funzione $f(x,y) = (x^2+y, \mathrm{e}^y \cdot x \cdot \sin(x))$ ammette una inversa locale nell'intorno del punto $(0,0)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**2.** I vettori $(\,1 \quad 1+i \quad 1\,)$ e $(\,1 \quad i \quad -i\,)$ di $\mathbb{C}^3$ sono tra loro ortogonali? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**3.** La serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n \cdot \log(n))^{-1}$ è convergente? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**4.** La soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x' = x^2(x^2+t^2) \\ x(0) = -1 \end{cases}$ è definita su $[0,\infty)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**5.** Sia $x$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x''' - 3x'' + 3x' - x = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 1. \end{cases}$
Si annulla il $\lim_{t\to+\infty} \log(t^{-2} \cdot x(t))$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**6.** In $\mathbb{R}^3$ nel piano $yz$ si consideri la circonferenza $C$ di equazione $(y-2)^2 + z^2 = 1$. Sia $S$ la superficie ottenuta facendo ruotare $C$ intorno all'asse $z$. È vero che per ogni 2-forma $\omega$ su $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{d}\omega = 0$ si ha $\int_S \omega = 0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

**7.** Sia $C$ la curva in $\mathbb{R}^2$ di equazione $2\mathrm{e}^{x+y}\cos^2(x+\pi/4) = 1$. Quale dei seguenti vettori è tangente a $C$ nel punto $(0,0)$ ?
$\boxed{\text{a}}$ $(2,1)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2,2)$; $\boxed{\text{c}}$ $(-1,1)$; $\boxed{\text{d}}$ Nessuno dei precedenti.

**8.** Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione definita da $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_n \quad n \geq 2. \end{cases}$
Quale delle seguenti condizioni garantisce che la successione è limitata?
$\boxed{\text{a}}$ $|\alpha| = |\beta| = 1$; $\boxed{\text{b}}$ $|\alpha| \leq 1/2$; $\boxed{\text{c}}$ $|\beta| \leq 1/2$; $\boxed{\text{d}}$ $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

**9.** Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini reali e convergente. È convergente la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?
$\boxed{\text{a}}$ Sì, sempre; $\boxed{\text{b}}$ Sì, purché la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia assoluta;
$\boxed{\text{c}}$ Può non convergere, anche se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
$\boxed{\text{d}}$ Converge solo se $a_n = 0$ per ogni $n$.

**10.** Se $x$ risolve il problema $\begin{cases} (2t + \mathrm{e}^{t+x}) + \mathrm{e}^{t+x} \cdot x' = 0 \\ x(0) = \log(2), \end{cases}$ quanto fa $x(1)$?
$\boxed{\text{a}}$ $0$; $\boxed{\text{b}}$ $1$; $\boxed{\text{c}}$ $-1$; $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

**11.** Sia $\alpha(t) = (\cos(t), \sin^3(t))$ per $t \in [0, \pi/2]$. Quanto fa $\int_\alpha \mathrm{d}x$?
$\boxed{\text{a}}$ $-\pi/2$; $\boxed{\text{b}}$ $1$; $\boxed{\text{c}}$ $-1$; $\boxed{\text{d}}$ $\pi/2$.

**12.** Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = \sin(1 - x^2 - y^2)\}$ e $\omega(x,y,z) = (1 + \mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$. Quanto fa $\int_S \omega$?
$\boxed{\text{a}}$ $0$; $\boxed{\text{b}}$ $1$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathrm{e}^\pi$; $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono $\pm 2$ punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

# Risposte esatte

**1.** F
**2.** F
**3.** F
**4.** V
**5.** F
**6.** V
**7.** b
**8.** d
**9.** b
**10.** c
**11.** c
**12.** a