UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 27/11/1999

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Il punto $(0,1)$ è critico per la funzione $\sin(x-y)$ sulla curva di equazione $2x^2+y^4=1$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. La soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \cdot \sin(t), \\ x(0)=1 \end{cases}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. Sia $f_n(x) = \frac{1}{n^3}\cos(n\cdot x)$. La serie di funzioni $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione definita da $\begin{cases} a_{n+2} = 2(a_{n+1}-a_n), \\ a_0 = 0,\ a_1 = 1. \end{cases}$
È vero che $a_n = 0$ per $n = 2^{100}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i+n}{i-2n^2} z^n$ converge su tutto $\mathbb{C}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Sia $\alpha(t) = (1-t^2)^7 + it$ per $t \in [-1,1]$. Il numero $\int\limits_{\alpha} \cos(z)\,\mathrm{d}z$ è immaginario puro? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Se $f(x,y) = x^3 - y^3$ e $\alpha(t) = (t,-t)$ per $t \in [0,1]$, quanto fa $\int\limits_{\alpha} f$?

$\boxed{\text{a}}$ $1/\sqrt{2}$; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{d}}$ 2.

8. Si consideri la soluzione x del problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) - 2t\cdot x(t) = \mathrm{e}^{t^2}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$ Quanto fa $x(1)$?

$\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ e; $\boxed{\text{c}}$ e^{-1}; $\boxed{\text{d}}$ $-$e.

9. Qual è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(x/n)^n$?

$\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ π; $\boxed{\text{d}}$ $+\infty$.

10. Qual è il massimo grado tra le soluzioni polinomiali dell'equazione differenziale $2x''+(x')^2-4x=0$?

$\boxed{\text{a}}$ La sola soluzione polinomiale è $x \equiv 0$; $\boxed{\text{b}}$ Grado 1;
$\boxed{\text{c}}$ Grado 2; $\boxed{\text{d}}$ Ci sono soluzioni polinomiali di ogni grado.

11. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si ponga $g(z) = |f(z)|^2$. Esiste la derivata $g'(z)$?

$\boxed{\text{a}}$ Sì, ovunque in Ω, qualunque sia f; $\boxed{\text{b}}$ No, in nessun punto di Ω, qualunque sia f;
$\boxed{\text{c}}$ Nei punti z in cui $f(z) = 0$; $\boxed{\text{d}}$ Nei punti z in cui $f'(z) = 0$.

12. Quante sono le soluzioni dell'equazione $\sin(z^2) = i$? (Si ricordi che $\sin(x+iy) = \cosh(y)\sin(x) + i\sinh(y)\cos(x)$.)

$\boxed{\text{a}}$ Nessuna; $\boxed{\text{b}}$ Una; $\boxed{\text{c}}$ Due; $\boxed{\text{d}}$ Infinite.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. F
2. F
3. V
4. V
5. F
6. V
7. a
8. b
9. d
10. c
11. c, d
12. d