UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 1/12/99 (non fiscale)

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $f(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z-3)}$, è vero che $\int\limits_{\partial\Delta(0,2)} \frac{f'(z)}{f(z)} = 0$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ tale che $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} |f(z_0+\varepsilon)| \neq \lim\limits_{\varepsilon\to 0} |f(z_0+i\varepsilon)|$. Può f avere un polo in z_0? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. Sia $\alpha(\vartheta) = \cos(\vartheta) + \cos^3(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$ per $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. È vero che $\int\limits_{\alpha} \frac{p(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot p(0)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è data una funzione continua f_n su $[0,1]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \max\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)| < +\infty$, si può concludere che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è continua? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. La soluzione x del problema di Cauchy $\begin{cases} x' \cdot \cos(x) \cdot t^2 = 1, \\ x(1) = 0, \end{cases}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Siano $(a_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ e $(b_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ soluzioni dell'equazione alle differenze $x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1}^2 - x_n$. È vero che se $a_0 = b_0$ e $a_1 = b_1$ allora necessariamente $a_{-100} = b_{-100}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Sia x la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x'' = x' + x^2 + t^2, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$ Quanto fa $x'''(0)$?

$\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ 2; $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

8. Se $f(z) = z^2 \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)}$, quanto fa $\mathrm{d}(f(z)\,\mathrm{d}z)$?

$\boxed{\text{a}}$ $2z \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)}\,\mathrm{d}z$; $\boxed{\text{b}}$ $(2z \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)} + z^2 \cdot \cos(z) \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)})\,\mathrm{d}z$;

$\boxed{\text{c}}$ $(2z \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)} + z^2 \cdot \cos(z) \cdot \mathrm{e}^{\sin(z)})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}$; $\boxed{\text{d}}$ 0.

9. Se $f(z) = \frac{\cos(z)}{(z-2)^2}$, quanto fa $\int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z$?

$\boxed{\text{a}}$ 1; $\boxed{\text{b}}$ 1/4; $\boxed{\text{c}}$ $i\pi/2$; $\boxed{\text{d}}$ $2\pi i$.

10. Quanto fa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$?

$\boxed{\text{a}}$ 2π; $\boxed{\text{b}}$ π; $\boxed{\text{c}}$ $\pi/2$; $\boxed{\text{d}}$ 1/4.

11. Su $[0,1]$ si consideri per $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$. La successione di funzioni $\{f_n\}$:

$\boxed{\text{a}}$ Converge in ogni punto di $[0,1]$, ma non uniformemente; $\boxed{\text{b}}$ Converge uniformemente in $[0,1]$;

$\boxed{\text{c}}$ Converge in alcuni punti di $[0,1]$ e diverge in altri; $\boxed{\text{d}}$ Diverge in tutti i punti di $[0,1]$.

12. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione tale che $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n, \\ a_0 = 1,\ a_1 = 2, \end{cases}$ e sia $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione di Fibonacci, ovvero quella tale che $\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \\ f_0 = 0,\ f_1 = 1. \end{cases}$ Che legame intecorre tra le successioni?

$\boxed{\text{a}}$ $f_n = 2^{a_n}$; $\boxed{\text{b}}$ $a_n = \mathrm{e}^{f_n}$; $\boxed{\text{c}}$ $a_n = 2^{f_n}$; $\boxed{\text{d}}$ Nessuno dei precedenti.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. F
2. F
3. V
4. V
5. F
6. V
7. b
8. d
9. c
10. c
11. a
12. c