"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 24/11/99 (non fiscale)

Esercizio 1. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $g(x) > 0$ e $g'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Siano $\lambda \geq 1$ e k due numeri reali fissati, e sia

$$S_{(\lambda,k)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq \lambda^2, \ z = k \cdot (\lambda^2 - x^2 - y^2)\}.$$

Si definisca una 2-forma differenziale $\omega(\lambda, k)$ su $\mathbb{R}^3$ tramite la formula

$$\omega_{(\lambda,k)} = g(k) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2+1}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2+1}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \right).$$

1. Posto $f(\lambda, k) = \int\limits_{S_{(\lambda,k)}} \omega_{(\lambda,k)}$, si calcoli esplicitamente $f(\lambda, k)$.

2. Si consideri il problema di Cauchy (con funzione incognita K e variabile indipendente λ)

$$\begin{cases} K' = K \cdot (K - \lambda^2) + \lambda^2 - K \\ K(1) = 0 \end{cases}$$

   e si dimostri che la soluzione è definita per ogni $\lambda \geq 1$.

3. Sia $D = \{(\lambda, k) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \geq 1, \ -1 \leq k \leq K(\lambda)\}$, dove K è la soluzione del suddetto problema. Si cerchino i punti di minimo della funzione $f(\lambda, k)$ su D.

4. Si dica se la funzione $f(\lambda, k)$ sia limitata su D.

Esercizio 2. Siano $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue, e si supponga che $\int\limits_0^\infty a(t) \, \mathrm{d}t < \infty$. Dati numeri reali α e β si considerino i due seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{(A)} \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \\ y(0) = \beta. \end{cases}$$

Siano rispettivamente y_A e y_B le soluzioni dei due problemi;

1. Si verifichi che y_A e y_B sono definite per ogni $t \geq 0$.

2. Si dimostri che esiste una costante reale positiva $M < \infty$ tale che $|y_A(t) - y_B(t)| \leq M|\alpha - \beta|$ per ogni $t \geq 0$.

3. Si dimostri che ciò non è vero in generale senza l'ipotesi $\int\limits_0^\infty a(t) \, \mathrm{d}t < \infty$.

4. Si supponga nuovamente che $\int\limits_0^\infty a(t) \, \mathrm{d}t < \infty$. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n(t) = f(t) + \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^2)}$. Si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

$$(\mathrm{A}_n) \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f_n(t), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

   Si dimostri che se y_n è la soluzione del problema A_n, allora essa è definita per ogni $t \geq 0$ ed esiste una costante reale positiva $K < \infty$ tale che $|y_A(t) - y_n(t)| \leq \frac{K}{n}$ per ogni $t \geq 0$.