La matematica dei suoni

Settimana Matematica, Dipartimento di Matematica, Pisa

5 – 7 Febbraio 2020

1 Suoni e polinomi

1.1 Modello di eco

Consideriamo il seguente problema. Supponiamo, per semplificare temporaneamente la nostra analisi, di vivere in uno spazio 1D. Sulla retta dove viviamo ci sono una sorgente sonora, un ascoltatore, ed un ostacolo che riflette parzialmente il suono, ad esempio una parete rocciosa.

Graficamente immaginiamo la seguente situazione, dove vengono rappresentati la sorgente sonora (A) e l'ascoltatore (B), oltre ad una versione stilizzata della parete rocciosa, anch'essa resa graficamente 1D per chiarezza.

Se all'istante $t = 0$ la sorgente A emette un suono, questo raggiungerà l'orecchio di B poco più tardi, diciamo al tempo $t = t_1$. A questo punto, l'onda continuerà a propagarsi fino a raggiungere la "parete rocciosa", per poi essere (parzialmente) riflessa e tornare a B qualche attimo dopo, al tempo $t_2 > t_1$.

In pratica, se il suono emesso da A viene rappresentato dalla funzione $s(t)$, quello che udirà B sarà solo

$$s_B(t) = s(t - t_1) + \lambda s(t - t_2), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Il coefficiente λ rappresenta l'attenuazione di intensità dell'onda sonora quando viene riflessa; in generale, una parte verrà assorbita.

1.2 Il caso discreto e i polinomi

Siamo interessati a studiare i suoni tramite un computer, e dunque guardando alla loro rappresentazione discreta, invece che la funzione $s(t)$ preferiamo considerare il suo sampling $x_k := s(k\Delta t)$.

Ci sarà utile considerare una corrispondenza fra vettori di sampling $\mathbf{x} := [x_k]_{k=0}^N$ e polinomi di grado N, definita da una corrispondenza Φ:

$$\Phi(\mathbf{x}) = p(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N.$$

Consideriamo come esempio l'effetto eco, che abbiamo già descritto nel caso continuo. Per semplificare la discussione, supponiamo che la sorgente sonora coincida con l'ascoltatore, cioè che i punti A e B coincidano: questa ipotesi corrisponde ad immaginare una persona che emette un suono (parla, batte le mani...) e ne ascolta l'eco. In questo caso avremo quindi $t_1 = 0$.

Nel caso discreto, supponiamo di aggiungere un'eco con $t_2 = m\Delta t$. Questo corrisponde a considerare un nuovo vettore di sampling y definito da

$$y_k = \begin{cases} x_k & k < m \\ x_k + \lambda x_{k-m} & k \geq m \end{cases}$$

dove come prima λ è il coefficiente di attenuazione.

Possiamo tradurre questa operazione in termini di polinomi? Più precisamente, che relazione c'è tra i polinomi $\Phi(\mathbf{x})$ e $\Phi(\mathbf{y})$? È abbastanza facile mostrare che, in questo caso,

$$\Phi(\mathbf{y}) = (1 + \lambda z^m) \cdot \Phi(\mathbf{x}).$$

In generale osserviamo che moltiplicare $\Phi(\mathbf{x})$ per z^m corrisponde a creare nel segnale un *ritardo* di lunghezza $m\Delta t$. Infatti al segnale con ritardo $s(t - m\Delta t)$ corrisponde un vettore di sampling

$$\mathbf{x}_{\text{rit}} = [\underbrace{0 \ldots 0}_{m}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N]$$

il cui polinomio associato è

$$\Phi(\mathbf{x}_{\text{rit}}) = x_0 z^m + x_1 z^{m+1} + \cdots + x_N z^{m+N} = z^m \Phi(\mathbf{x}).$$

Per avere un segnale attenuato è sufficiente moltiplicare la funzione segnale (e quindi il vettore di sampling e il polinomio) per un opportuno coefficiente compreso tra 0 e 1.

Sovrapporre più segnali equivale a farne la somma (*ipotesi di linearità*), cioè a sommare componente per componente i vettori di sampling corrispondenti, e quindi a sommare coefficiente per coefficiente i polinomi associati (si tratta della classica somma di polinomi). Più in dettaglio, supponiamo di avere due segnali $s(t)$ e $r(t)$, definiti sullo stesso intervallo di tempo, con vettori di sampling $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, rispettivamente. Allora il segnale ottenuto dalla sovrapposizione di $s(t)$ e $r(t)$ è

$$u(t) = s(t) + r(t),$$

e il suo vettore di sampling è

$$\mathbf{w} = [x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N].$$

Passando ai polinomi troviamo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{w}) &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)z + (x_2 + y_2)z^2 + \cdots + (x_N + y_N)z^N \\ &= \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Possiamo quindi sbizzarrirci a sovrapporre al segnale di partenza varie copie del segnale stesso, ciascuna con un ritardo e un coefficiente di attenuazione diversi. Il segnale che ne risulta avrà un polinomio associato della forma

$$(1 + \lambda_1 z^{m_1} + \lambda_2 z^{m_2} + \cdots + \lambda_p z^{m_p})\Phi(\mathbf{x}),$$

dove $m_1, \ldots, m_p$ sono i ritardi (espressi al solito come multipli di Δt) e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono i coefficienti di attenuazione.

Possiamo pensare al polinomio $1 + \lambda_1 z^{m_1} + \lambda_2 z^{m_2} + \cdots + \lambda_p z^{m_p}$ come proveniente, sempre secondo la corrispondenza Φ, da un vettore di lunghezza $m_p + 1$ contenente i coefficienti $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ nelle posizioni di indice $0, m_1, \ldots, m_p$.

2 Convoluzione discreta e prodotto di polinomi

Introduciamo uno strumento tecnico che ci aiuterà nella trattazione dei problemi legati alla manipolazione dei segnali: la *convoluzione discreta* di vettori.

Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_M], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_N],$$

La convoluzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dà un vettore $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_{M+N+1}]$ definito da

$$w_k = \sum_j x_{k-j} y_j.$$

Questa definizione appare un po' arida, ma cerchiamo di capire meglio che cosa significa in pratica. Supponiamo di voler calcolare l'elemento w_k di $\mathbf{w}$. Scriviamo su una riga gli elementi di $\mathbf{y}$, in ordine crescente, e sulla riga sotto scriviamo gli elementi di $\mathbf{x}$, in ordine decrescente, incolonnati in modo che x_0 si trovi sotto y_k:

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & y_{k-M} & \cdots & y_{k-1} & y_k & \cdots \\ & x_M & \cdots & x_1 & x_0 & \end{array}$$

Poi calcoliamo il prodotto di ciascun elemento di $\mathbf{x}$ per l'elemento di $\mathbf{y}$ che si trova subito sopra (se esiste), e sommiamo tutti questi prodotti, trovando così w_k.

Facendo "scorrere" $\mathbf{x}$ da sinistra verso destra calcoliamo tutti gli elementi di $\mathbf{w}$. Per esempio, supponiamo $N = 4$ e $M = 2$; allora avremo

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & & \end{array}$$

da cui $w_0 = x_0 y_0$;

$$\begin{array}{cccccc} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & \end{array}$$

da cui $w_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0$;

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & \end{array}$$

da cui $w_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0$;

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & x_2 & x_1 & x_0 & \end{array}$$

da cui $w_3 = x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$;

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_4 = x_0y_4 + x_1y_3 + x_2y_2$;

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \\ & & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_5 = x_1y_4 + x_2y_3$; e infine

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ & & & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_6 = x_2y_4$.

La convoluzione discreta che abbiamo appena descritto ha un interessante legame con il prodotto di polinomi. Associamo al vettore $\mathbf{x}$ il polinomio

$$x(z) = x_0 + x_1z + x_2z^2 + \ldots + x_Mz^M,$$

cioè il polinomio $\Phi(\mathbf{x})$ con la notazione usata in precedenza, e associamo al vettore $\mathbf{y}$ il polinomio

$$y(z) = y_0 + y_1z + y_2z^2 + \ldots + x_Nz^N,$$

cioè il polinomio $\Phi(\mathbf{y})$. Consideriamo il prodotto

$$w(z) := x(z)y(z).$$

Il polinomio $w(z)$ ha grado $M + N$ e lo possiamo scrivere come

$$w(z) = w_0 + w_1z + w_2z^2 + \ldots + w_{M+N}z^{M+N}.$$

La proprietà che ci interessa è la seguente:

> *i coefficienti di $w(z)$ sono proprio gli elementi del vettore $\mathbf{w}$ dato dalla convoluzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.*

Esempio. Per chiarirci le idee, esaminiamo un caso concreto. Prendiamo i seguenti vettori di sampling[1]

$$\mathbf{x} = [1 \quad 0 \quad 2], \qquad \mathbf{y} = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 1].$$

[1] Ovviamente nella realtà i vettori di sampling sono generalmente molto più lunghi!

Applichiamo le formule viste sopra per calcolare la convoluzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (fatelo come esercizio!) e troviamo il vettore

$$\mathbf{w} = [-1 \quad 2 \quad -2 \quad 7 \quad 1 \quad 6 \quad 2].$$

Esercizio: usando i dati dell'esempio appena visto, verificate che l'operazione di convoluzione è *commutativa*, cioè che la convoluzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dà lo stesso risultato della convoluzione di $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$.

La commutatività della convoluzione è coerente con il fatto (che certamente conoscete) che anche la moltiplicazione di polinomi è commutativa.

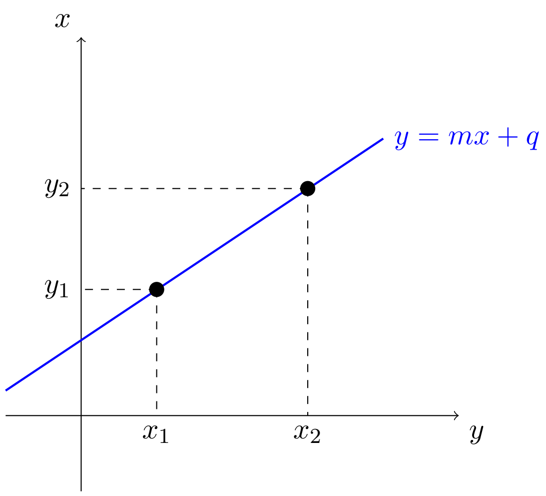
3 Come si calcola la convoluzione in pratica?

Il calcolo della convoluzione di due vettori, cioè del prodotto di due polinomi, può essere svolto usando la definizione, come abbiamo fatto qui sopra per un esempio di grado piccolo. Nel caso più realistico di vettori di sampling lunghi (cioè polinomi di grado alto), tuttavia, applicare la definizione non è un approccio molto efficace: esistono metodi più veloci.

In pratica, noi calcoleremo la convoluzione per mezzo di un apposito comando MATLAB e non abbiamo necessariamente bisogno di sapere che cosa faccia esattamente questo comando: ci basta sapere che otteniamo il risultato desiderato. Tuttavia può essere interessante avere un'idea di quali metodi alternativi esistano per calcolare prodotti di polinomi. In particolare accenneremo qui ai metodi del tipo *valutazione/interpolazione*.

3.1 Quanti valori servono per determinare un polinomio?

Ricorderete senz'altro dalla geometria euclidea che per due punti fissati nel piano (non coincidenti!) passa una e una sola retta. Sul piano cartesiano Oxy, una retta è individuata da un'equazione del tipo $y = mx + q$ (escludiamo le rette verticali).

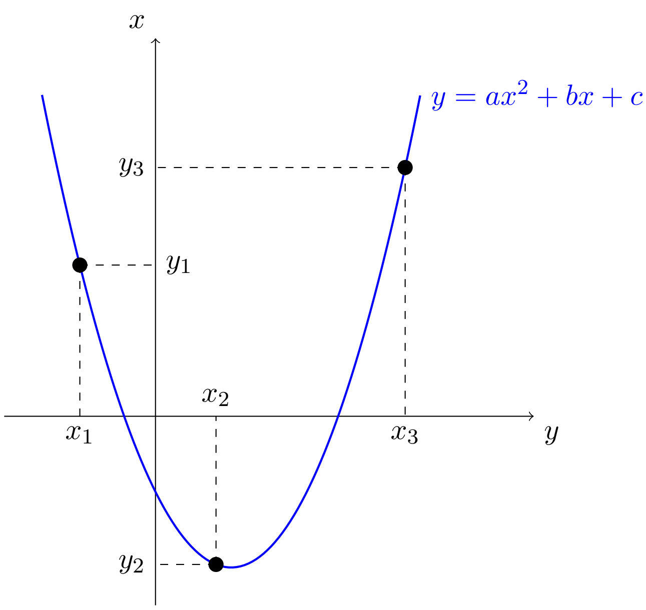


Se so che la retta passa per due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e voglio trovare i parametri m e q, posso imporre le condizioni di appartenenza dei punti alla retta e scrivere un sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione m, q, che ci fornisce i parametri dell'equazione della retta cercata. L'ipotesi che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) appartengano alla retta equivale a dire che y_1 è il valore del polinomio di primo grado $mx + q$ valutato in x_1, e y_2 è il valore di $mx + q$ valutato in x_2. Quindi stiamo dicendo che, se conosciamo due valutazioni distinte di $mx + q$, possiamo ricostruire univocamente i coefficienti m e q del polinomio.

Possiamo generalizzare questa proprietà a gradi più alti? Probabilmente sapete che per tre punti nel piano con ascisse distinte passa una e una sola parabola (con asse verticale). La parabola ha equazione cartesiana $y = ax^2 + bx + c$, cioè un polinomio di secondo grado.



Se so che la parabola passa per tre punti di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), cioè che il polinomio $ax^2 + bx + c$ vale y_1 quando è valutato in x_1, vale y_2 quando è valutato in x_2 e vale y_3 quando è valutato in x_3, posso scrivere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

che ha soluzione unica e ci fornisce quindi i coefficienti a, b e c del nostro polinomio di secondo grado.

Più in generale: se conosco $n+1$ valutazioni distinte di un polinomio $p(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ di grado n, posso ricostruire univocamente il polinomio: infatti è sufficiente risolvere il sistema lineare di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite

$$\begin{cases} y_1 = p_n x_1^n + \ldots + p_1 x_1 + p_0 \\ y_2 = p_n x_2^n + \ldots + p_1 x_2 + p_0 \\ \ldots \\ y_n = p_n x_n^n + \ldots + p_1 x_n + p_0 \\ y_{n+1} = p_n x_{n+1}^n + \ldots + p_1 x_{n+1} + p_0 \end{cases}$$

che ha soluzione unica data dai coefficienti $p_n, \ldots, p_1, p_0$ del polinomio cercato.

3.2 E ora moltiplichiamo!

Il nostro obiettivo è calcolare un prodotto di polinomi: dati $p(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ e $q(x) = q_m x^m + \ldots + q_1 x + q_0$ di gradi rispettivamente n e m, cerchiamo il polinomio prodotto $r(x) := p(x)q(x) = r_{n+m} x^{n+m} + \ldots + r_1 x + r_0$, che avrà grado $n+m$. Osserviamo che

1. per quanto detto sopra, se conosco $n+m+1$ punti del piano di coordinate (x_i, y_i), con $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$ e gli x_i tutti distinti, tali che $y_i = r(x_i)$ per ogni i, allora posso individuare univocamente il polinomio $r(x)$ risolvendo un sistema lineare;

2. per qualsiasi numero x, il valore $r(x)$ è pari al prodotto di $p(x)$ per $q(x)$.

Quindi per calcolare i coefficienti di $r(x)$ conoscendo quelli di $p(x)$ e di $q(x)$ posso procedere così:

- scelgo a piacere $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m+1}$ numeri reali strettamente crescenti,
- eseguo la fase di *valutazione*: per $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$ calcolo $y_i := p(x_i)q(x_i)$, cioè il valore che deve prendere $r(x)$ per $x = x_i$;
- eseguo la fase di *interpolazione*: conoscendo gli (x_i, y_i), scrivo e risolvo il sistema lineare che mi dà i coefficienti di $r(x)$.

Facciamo un esempio: siano

$$p(x) = x + 1 \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Dobbiamo scegliere $1 + 2 + 1 = 4$ numeri su cui valutare i due polinomi e il loro prodotto $r(x)$: prendiamo per esempio[2]

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 3 \qquad .$$

[2]Per avere un algoritmo efficiente, la scelta degli x_i segue dei criteri particolari che qui non esponiamo, ed è tipicamente molto diversa da quella del nostro esempio.

Ora calcoliamo le valutazioni:

$$\begin{array}{lll} p(0) = 1, & q(0) = -1, & r(0) = 1 \times (-1) = -1, \\ p(1) = 2, & q(1) = -2, & r(1) = 2 \times (-2) = -4, \\ p(2) = 3, & q(2) = -1, & r(2) = 3 \times (-5) = -3, \\ p(3) = 4, & q(3) = 2, & r(3) = 4 \times 2 = 8. \end{array}$$

Infine eseguiamo l'interpolazione: posto $r(x) = r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r_0 = -1 \\ r_3 + r_2 + r_1 + r_0 = -4 \\ 8r_3 + 4r_2 + 2r_1 + r_0 = -3 \\ 27r_3 + 9r_2 + 3r_1 + r_0 = 8 \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto a mano in un uggioso pomeriggio di pioggia, oppure con una calcolatrice scientifica o con un software di calcolo numerico. Indipendentemente dal metodo scelto, troviamo la soluzione

$$r_3 = 1, \qquad r_2 = -1, \qquad r_1 = -3, \qquad r_0 = -1,$$

quindi $r(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$. Potete verificare che moltiplicando $p(x)$ e $q(x)$ termine a termine con il metodo consueto trovate lo stesso risultato.

L'approccio valutazione/interpolazione può apparire eccessivamente laborioso in questo esempio, ma diventa conveniente quando si devono moltiplicare polinomi di gradi alti.

4 Torniamo al modello dell'eco

Alla luce di quanto abbiamo imparato finora, possiamo concludere che:

- applicare un effetto di eco con ritardo $m\Delta t$ e attenuazione λ ad un segnale avente vettore di sampling $\mathbf{x}$ equivale a calcolare la convoluzione discreta del vettore

  $$[1 \quad \underbrace{0 \ldots 0}_{m-1} \quad \lambda]$$

  con $\mathbf{x}$,
- in termini di polinomi associati ai vettori, applicare un'eco con ritardo $m\Delta t$ e attenuazione λ corrisponde a calcolare $(1 + \lambda z^m)\Phi(\mathbf{x})$.

Un discorso simile vale per un effetto di eco con più ritardi. Per esempio, applicare a $\mathbf{x}$ un effetto di eco con ritardi di $2\Delta t$, $4\Delta t$ e $7\Delta t$ corrisponde a calcolare la convoluzione del vettore

$$[1 \quad 0 \quad \lambda_1 \quad 0 \quad \lambda_2 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_3]$$

con $\mathbf{x}$. Dal punto di vista dei polinomi, stiamo calcolando il prodotto

$$(1 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z^4 + \lambda_3 z^7)\Phi(\mathbf{x}),$$

dove, come al solito, i λ indicano i coefficienti di attenuazione e dipendono dal modello fisico.

Possiamo anche vedere facilmente che risultato dà la *composizione* di effetti di eco, cioè che cosa succede quando applico un'eco ad un segnale già dotato di eco. Supponiamo di partire da un segnale (senza eco) con vettore di sampling $\mathbf{x}$ e di applicare un primo effetto di eco con ritardo $m_1\Delta t$ e coefficiente di attenuazione λ_1. Come sappiamo, ciò equivale a calcolare il prodotto di polinomi

$$(1 + \lambda_1 z^{m_1})\Phi(\mathbf{x}).$$

Ora applichiamo un secondo effetto di eco, questa volta con ritardo $m_2\Delta t$ e coefficiente di attenuazione λ_2. Avremo quindi il polinomio

$$(1 + \lambda_2 z^{m_2})(1 + \lambda_1 z^{m_1})\Phi(\mathbf{x}),$$

e moltiplicando i primi due fattori otteniamo

$$(1 + \lambda_1 z^{m_1} + \lambda_2 z^{m_2} + \lambda_1\lambda_2 z^{m_1+m_2})\Phi(\mathbf{x}),$$

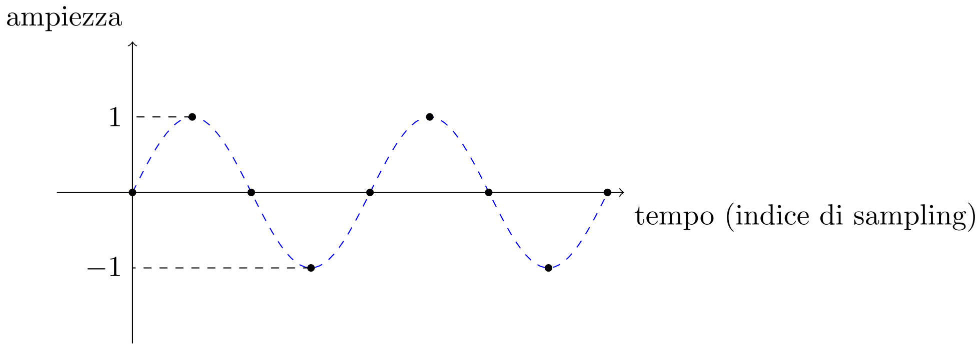
cioè la sovrapposizione di *tre* effetti di eco sul segnale originale, con ritardi $m_1\Delta t$, $m_2\Delta t$, $(m_1 + m_2)\Delta t$ e coefficienti di attenuazione λ_1, λ_2 e $\lambda_1\lambda_2$.

5 Filtri

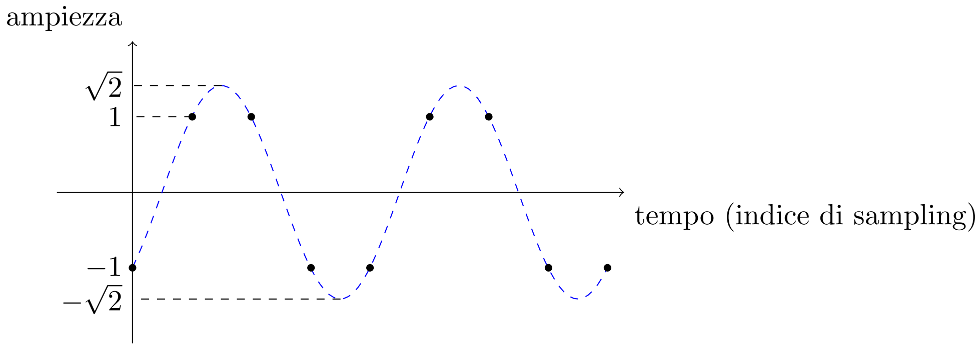
Più in generale, ogni volta che modifichiamo un segnale calcolando la convoluzione del suo vettore di sampling $\mathbf{x}$ con un altro vettore $\mathbf{v}$ (o equivalentemente calcolando il prodotto di polinomi $\Phi(\mathbf{v})\Phi(\mathbf{x})$) stiamo applicando un *filtro* al segnale. Il filtro è identificato dal vettore $\mathbf{v}$ o dal polinomio $\Phi(\mathbf{v})$. A seconda dei coefficienti che contiene, avrà effetti diversi sul segnale. In particolare, ci interesserà capire come un filtro modifichi le frequenze del segnale: si tratta di studiare una proprietà dei filtri nota come *risposta in frequenza* (frequency response).

Per chiarire l'idea, prendiamo un esempio molto semplice: il filtro dato da $\mathbf{v} = [1 \quad 1]$. La convoluzione di $\mathbf{v}$ con un vettore di sampling $\mathbf{x}$ ha l'effetto di sommare tutte le coppie di elementi adiacenti di $\mathbf{x}$. Per studiare la risposta in frequenza, scegliamo $\mathbf{x}$ proveniente da un segnale sinusoidale (il cui sviluppo di Fourier contiene quindi un solo termine: non c'è sovrapposizione di frequenze, ma una sola frequenza "pura") e applichiamo il nostro filtro. Com'è fatto il segnale in uscita?

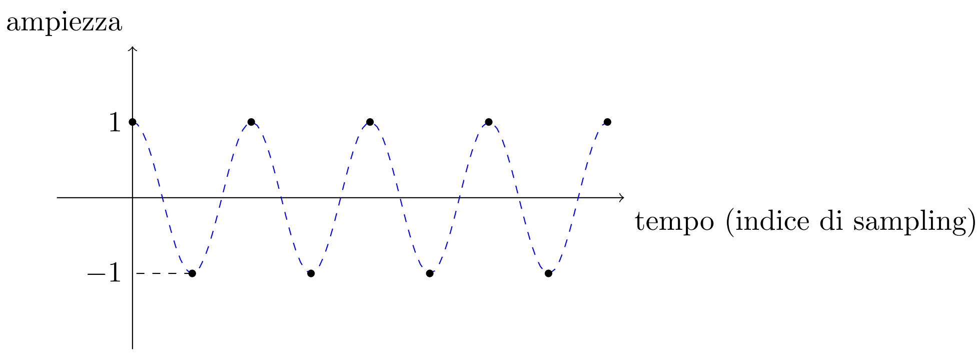
Consideriamo dapprima il caso in cui il segnale di partenza abbia frequenza $f_s/4$, dove $f_s = 1/\Delta t$ è la frequenza di sampling. La figura qui sotto rappresenta il segnale e i valori misurati dal campionamento:



Ora applichiamo il filtro. La figura mostra gli elementi del vettore di sampling in uscita.[3] Per comodità, disegniamo anche il segnale sinusoidale corrispondente, che ha semiampiezza $\sqrt{2}$.



Che cosa succede invece se prendiamo un segnale di partenza con frequenza pari a $f_s/2$, cioè la frequenza massima permessa dal teorema di Shannon-Nyquist per l'intervallo di sampling usato?



[3]Nel calcolare la convoluzione abbiamo "imbrogliato" alle estremità per tener conto della periodicità del segnale.

In questo caso l'applicazione del filtro dà un vettore che ha tutti gli elementi uguali a zero! Quindi i segnali con frequenza $f_s/2$ vengono cancellati dal filtro.

Se fossiamo partiti da un segnale in ingresso con frequenza di poco inferiore a $f_s/2$ avremmo trovato un segnale in uscita non nullo, ma con ampiezza molto piccola.

Riassumendo, il nostro filtro tende a preservare o amplificare i segnali con frequenza bassa e ad attenuare quelli con frequenza alta. Si tratta di un (rozzo) esempio di *filtro passa-basso*.

Se applico il filtro ad un segnale costituito dalla sovrapposizione di più frequenze, otterrò un segnale in uscita in cui restano le frequenze basse, mentre quelle alte sono attenuate o cancellate.