La matematica dei suoni

Filtri, convoluzioni, e prodotti fra polinomi

Paola Boito — Leonardo Robol

Settimana Matematica 2020
Dipartimento di Matematica, Pisa

Modificare un segnale audio

Riassunto delle puntate precedenti:

- Abbiamo visto come modellare un segnale audio.
- . . . e capito come sintetizzarlo.

A questo punto è naturale chiedersi: come possiamo modificare un segnale per ottenere effetti particolari?

Modificare un segnale audio

Riassunto delle puntate precedenti:

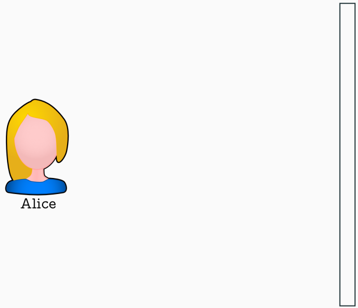
- Abbiamo visto come modellare un segnale audio.
- ... e capito come sintetizzarlo.

A questo punto è naturale chiedersi: come possiamo modificare un segnale per ottenere effetti particolari?

Dal punto di vista matematico, ci proponiamo di costruire delle trasformazioni di funzioni (il segnale $s(t)$) in altre funzioni (il nuovo segnale elaborato).

Un problema modello

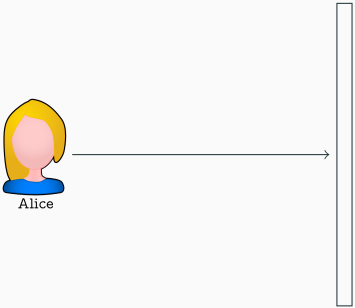
Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:



Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

Un problema modello

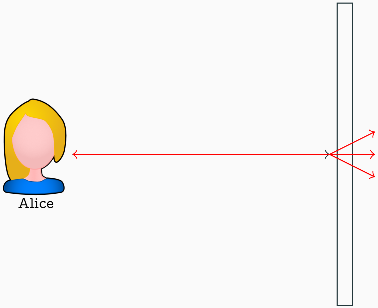
Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:



Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

Un problema modello

Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:



Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

Difficoltà nel modello

Per come abbiamo descritto il problema, il suono emesso da Alice verrebbe diffuso in ogni direzione.

- Dovremmo tenere conto di tutte queste direzioni, e verificare come viene riflesso il segnale audio quando colpisce il muro a differenti angolazioni.
- Questo richiederebbe almeno degli integrali.

Per semplificare il discorso, possiamo supporre che Alice sia un essere zero-dimensionale (i.e., un punto), che vive in uno spazio 1-dimensionale (i.e., una retta).

Nuovo modello semplificato

- Se Alice (il punto A) produce un suono $s(t)$, che cosa ascolterà?
- Dobbiamo tenere conto di quanto impiega il suono ad arrivare ad M e tornare (tenendo conto di una velocità nel vuoto di $\approx 340\ \frac{m}{s}$).

Nuovo modello semplificato

- Se Alice (il punto A) produce un suono $s(t)$, che cosa ascolterà?
- Dobbiamo tenere conto di quanto impiega il suono ad arrivare ad M e tornare (tenendo conto di una velocità nel vuoto di $\approx 340\ \frac{m}{s}$).

Il suono con l'aggiunta di eco sarà denotato con $s_E(t)$; avremo

$$s_E(t) = s(t) + \lambda s(t - t_E), \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad t_E = \frac{2|M - A|}{v_S},$$

dove $v_S \approx 340\ \frac{m}{s}$ è la velocità del suono e λ è il coefficiente di attenuazione.

Modello discreto

Come per la creazione dei suoni, a noi interessa un modello che contenga un numero finito di dati. Perciò vogliamo ricavare i sampling $s_E(j \cdot \Delta t)$ a partire da $s(j \cdot \Delta t)$.

Consideriamo la discretizzazione di $s(t)$:

$$x_j = s(j \cdot \Delta t) \implies \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s(0) & s(\Delta t) & s(2\Delta t) & s(3\Delta t) & \dots \end{bmatrix}$$

...e quella di $s_E(t)$:

$$\begin{aligned} x_{E,j} := s_E(j \cdot \Delta t) \implies \mathbf{x}_E &= \begin{bmatrix} s_E(0) & s_E(\Delta t) & s_E(2\Delta t) & s_E(3\Delta t) & \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dots & s(j \cdot \Delta t) + \lambda s((j-m)\Delta t) & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove $m\Delta t = t_E$.

Modello discreto (continua)

Possiamo descrivere l'operazione "aggiungere eco" in modo totalmente discreto, senza coinvolgere $s(t)$:

$$x_{E,j} = x_j + \lambda x_{j-m}, \qquad m := \frac{t_E}{\Delta t} = t_E \cdot n_S,$$

dove estendiamo il vettore ponendo $x_j = 0$ per $j < 0$, e n_S è il numero di campioni per secondo (nel nostro caso 44100).

Modello discreto (continua)

Possiamo descrivere l'operazione "aggiungere eco" in modo totalmente discreto, senza coinvolgere $s(t)$:

$$x_{E,j} = x_j + \lambda x_{j-m}, \qquad m := \frac{t_E}{\Delta t} = t_E \cdot n_S,$$

dove estendiamo il vettore ponendo $x_j = 0$ per $j < 0$, e n_S è il numero di campioni per secondo (nel nostro caso 44100).

Questa operazione è un caso particolare di convoluzione discreta di vettori.

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & & \end{array}$$

da cui $w_0 = x_0 y_0$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & \end{array}$$

da cui $w_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & \end{array}$$

da cui $w_2 = x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & x_2 & x_1 & x_0 & \end{array}$$

da cui $w_3 = x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_4 = x_0 y_4 + x_1 y_3 + x_2 y_2$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ & & & x_2 & x_1 & x_0 & \end{array}$$

da cui $w_5 = x_1 y_4 + x_2 y_3$;

Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ & & & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_6 = x_2 y_4$.

Convoluzione e modello discreto dell'eco

Per esempio, se nel nostro modello aggiungiamo ad un segnale discreto **x** un'eco con ritardo pari a 2 intervalli di sampling

$$x_{E,j} = x_j + \lambda x_{j-2},$$

questa operazione equivale a calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e il vettore **x**.

Convoluzione e modello discreto dell'eco

Per esempio, se nel nostro modello aggiungiamo ad un segnale discreto $\mathbf{x}$ un'eco con ritardo pari a 2 intervalli di sampling

$$x_{E,j} = x_j + \lambda x_{j-2},$$

questa operazione equivale a calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e il vettore $\mathbf{x}$.

Idea: Cerchiamo una rappresentazione di queste trasformazioni che le renda "semplici da descrivere". Per farlo, useremo i polinomi.

Ripasso veloce: i polinomi

Partiamo dalle basi: cos'è un polinomio?

- Per noi, una combinazione finita di monomi del tipo z^j:

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_N z^N,$$

- Il grado è il massimo j tale che $p_j \neq 0$.
- Un polinomio induce anche una funzione, ovvero possiamo valutarlo in un punto $\hat{z} \in \mathbb{R}$:

$$\hat{z} \mapsto p_0 + p_1 \hat{z} + \ldots + p_N \hat{z}^N \in \mathbb{R}.$$

Vettori e polinomi

Possiamo instaurare una corrispondenza fra i vettori di lunghezza finita e i polinomi. Dato $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

definiamo un polinomio di grado N nella variabile z:

$$x(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N = \sum_{j=0}^{N} x_j z^j.$$

Vettori e polinomi

Possiamo instaurare una corrispondenza fra i vettori di lunghezza finita e i polinomi. Dato $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

definiamo un polinomio di grado N nella variabile z:

$$x(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N = \sum_{j=0}^{N} x_j z^j.$$

Viceversa, ad un polinomio di grado N possiamo associare il vettore dei suoi $N + 1$ coefficienti.

Vettori e polinomi

Possiamo instaurare una corrispondenza fra i vettori di lunghezza finita e i polinomi. Dato $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

definiamo un polinomio di grado N nella variabile z:

$$x(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N = \sum_{j=0}^{N} x_j z^j.$$

Viceversa, ad un polinomio di grado N possiamo associare il vettore dei suoi $N + 1$ coefficienti.

Questa è una corrispondenza biunivoca.

Rappresentare l'eco come polinomio

Ricordiamo che il vettore $\mathbf{x}$ più l'eco è definito come:

$$\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{m-1} & x_m + \lambda x_0 & x_{m+1} + \lambda x_1 & \dots & x_{N+m} + \lambda x_N \end{bmatrix}.$$

Osservazione: Il vettore $\mathbf{x}_E$ ha come polinomio associato:

$$x_E(z) = x(z)(1 + \lambda z^m).$$

In effetti, moltiplicare per z significa ritardare l'input di 1 intervallo di sampling. In generale, moltiplicare per z^m significa ritardare l'input di m intervalli di sampling.

Rappresentare l'eco come polinomio

Possiamo anche rappresentare effetti di eco più complicati.

- La sovrapposizione di due eco si calcola come

$$(1 + \lambda_1 z^{m_1} + \lambda_2 z^{m_2})x(z).$$

- La composizione di due effetti di eco è rappresentata da

$$(1 + \lambda_2 z^{m_2})(1 + \lambda_1 z^{m_1})x(z)$$

$$= (1 + \lambda_1 z^{m_1} + \lambda_2 z^{m_2} + \lambda_1 \lambda_2 z^{m_1 + m_2})x(z),$$

cioè corrisponde alla sovrapposizione di tre eco.

Riassumendo...

Abbiamo dato due descrizioni matematiche dell'operazione "aggiungere eco ad un segnale discretizzato **x**":

- possiamo calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

  e il vettore **x**;
- oppure, in termini di polinomi, calcolare il prodotto

$$(1 + \lambda z^m)x(z).$$

Convoluzione di vettori e prodotto di polinomi

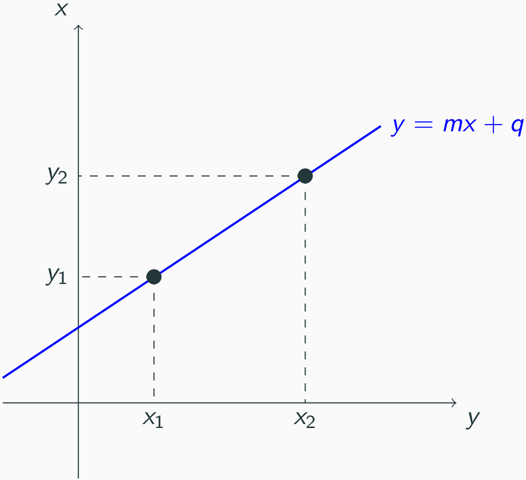
Queste due descrizioni sono coerenti e intercambiabili, perché vale un'importante proprietà:

se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono vettori con polinomi associati $x(z)$ e $y(z)$, allora gli elementi del vettore $\mathbf{w}$ convoluzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono proprio i coefficienti del polinomio prodotto $w(z) = x(z)y(z)$.

In particolare, molti effetti sonori si possono convenientemente rappresentare come prodotti di polinomi. Come si calcola efficientemente questo prodotto?

Quanti valori servono per determinare un polinomio?

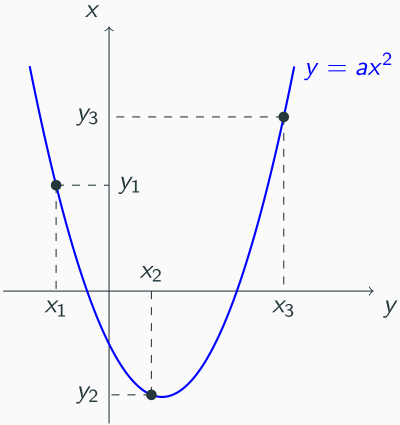
Ripassiamo un po' di geometria. Ricorderete che per due punti distinti nel piano passa una e una sola retta. Quindi, date le coordinate dei punti, posso calcolare l'equazione della retta (polinomio di primo grado).



$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

Quanti valori servono per determinare un polinomio?

Analogamente, per tre punti distinti nel piano passa una e una sola parabola. Date le coordinate dei punti, posso calcolare l'equazione della parabola (polinomio di secondo grado).



$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

Quanti valori servono per determinare un polinomio?

Più in generale: se conosco $n+1$ valutazioni distinte di un polinomio $p(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ di grado n, posso ricostruire univocamente il polinomio: infatti è sufficiente risolvere il sistema lineare di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite

$$\begin{cases} y_1 = p_n x_1^n + \ldots + p_1 x_1 + p_0 \\ y_2 = p_n x_2^n + \ldots + p_1 x_2 + p_0 \\ \ldots \\ y_n = p_n x_n^n + \ldots + p_1 x_n + p_0 \\ y_{n+1} = p_n x_{n+1}^n + \ldots + p_1 x_{n+1} + p_0 \end{cases}$$

che ha soluzione unica data dai coefficienti $p_n, \ldots, p_1, p_0$ del polinomio cercato.

Questa operazione è detta interpolazione polinomiale.

E ora moltiplichiamo!

Per calcolare il prodotto di polinomi

$$r(x) = p(x)q(x),$$

dove $p(x)$ ha grado N e $q(x)$ ha grado M, posso procedere così:

- scelgo a piacere $x_1, x_2, \dots, x_{N+M+1}$ numeri reali strettamente crescenti,
- eseguo la fase di valutazione: per $i = 1, 2, \dots, N+M+1$ calcolo $y_i := p(x_i)q(x_i)$, cioè il valore che deve assumere $r(x)$ per $x = x_i$;
- eseguo la fase di interpolazione: conoscendo gli (x_i, y_i), scrivo e risolvo il sistema lineare che mi dà i coefficienti di $r(x)$.

Esempio di prodotto tramite valutazione/interpolazione

Facciamo un esempio concreto per capire meglio. Siano

$$p(x) = x + 1 \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Scegliamo $1 + 2 + 1 = 4$ numeri su cui valutare i due polinomi e il loro prodotto $r(x)$:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 3 \qquad .$$

Ora calcoliamo le valutazioni:

$$\begin{aligned}
&p(0) = 1, \quad q(0) = -1, \quad r(0) = 1 \times (-1) = -1,\\
&p(1) = 2, \quad q(1) = -2, \quad r(1) = 2 \times (-2) = -4,\\
&p(2) = 3, \quad q(2) = -1, \quad r(2) = 3 \times (-5) = -3,\\
&p(3) = 4, \quad q(3) = 2, \qquad r(3) = 4 \times 2 = 8.
\end{aligned}$$

Esempio di prodotto tramite valutazione/interpolazione

Infine eseguiamo l'interpolazione: posto $r(x) = r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r_0 = -1 \\ r_3 + r_2 + r_1 + r_0 = -4 \\ 8r_3 + 4r_2 + 2r_1 + r_0 = -3 \\ 27r_3 + 9r_2 + 3r_1 + r_0 = 8 \end{cases}$$

che ha soluzione unica

$$r_3 = 1, \qquad r_2 = -1, \qquad r_1 = -3, \qquad r_0 = -1,$$

quindi concludiamo che $r(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$.

Filtri

Ogni volta che modifichiamo un segnale calcolando la convoluzione del suo vettore di sampling $\mathbf{x}$ con un altro vettore $\mathbf{v}$ (o equivalentemente calcolando il prodotto di polinomi $v(z)x(z)$) stiamo applicando un filtro al segnale.

Il filtro è identificato dal vettore $\mathbf{v}$ o dal polinomio $v(z)$. A seconda dei coefficienti che contiene, avrà effetti diversi sul segnale.

In particolare, vogliamo capire come un filtro modifichi le frequenze del segnale: si tratta di studiare la risposta in frequenza del filtro.

Risposta in frequenza

Come esempio, consideriamo il filtro dato da

$$\mathbf{v} = [1 \quad 1].$$

La convoluzione di **v** con un vettore di sampling **x** ha l'effetto di sommare tutte le coppie di elementi adiacenti di **x**.

Risposta in frequenza

Come esempio, consideriamo il filtro dato da

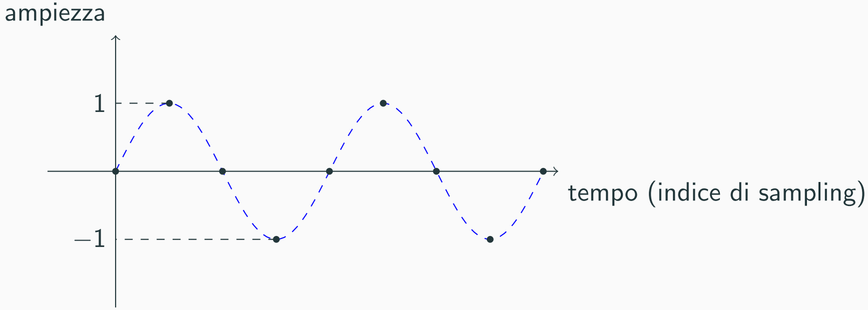
$$\mathbf{v} = [1 \quad 1].$$

La convoluzione di $\mathbf{v}$ con un vettore di sampling $\mathbf{x}$ ha l'effetto di sommare tutte le coppie di elementi adiacenti di $\mathbf{x}$.

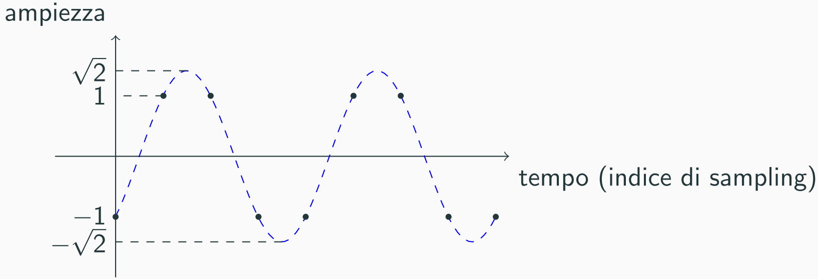
Per studiare la risposta in frequenza, scegliamo $\mathbf{x}$ proveniente da un segnale sinusoidale (cioè una sola frequenza "pura") e applichiamo il nostro filtro. Com'è fatto il segnale in uscita?

Risposta in frequenza

Per un segnale con frequenza $f_s/4$, dove f_s è la frequenza di sampling:

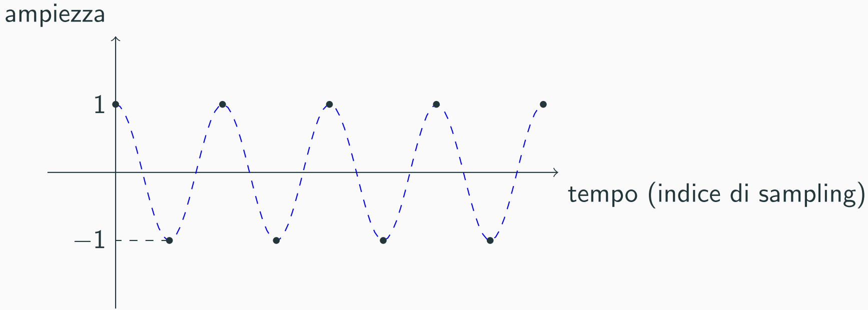


Applicando il filtro otteniamo:



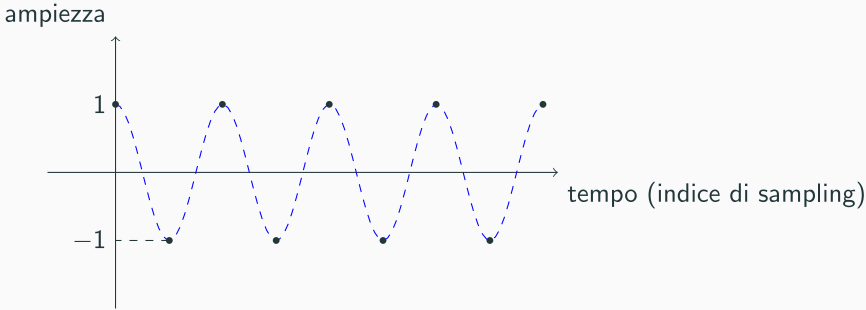
Risposta in frequenza

Ma per un segnale con frequenza $f_s/2$ (la massima possibile)...



Risposta in frequenza

Ma per un segnale con frequenza $f_s/2$ (la massima possibile)...



...applicando il filtro troviamo il vettore nullo! Si tratta infatti di un filtro che tende ad attenuare o cancellare le frequenze alte.

E ora mettiamoci al lavoro!

All'URL

`https://leonardo.robol.it/teaching/matematica-e-musica/`

trovate gli esercizi per la seconda sessione di laboratorio.