# La matematica dei suoni

## Effetti di eco e convoluzioni

Paola Boito — Leonardo Robol

Settimana Matematica 2021
Dipartimento di Matematica, Pisa

# Modificare un segnale audio

Riassunto della puntata precedente:

- Abbiamo visto come modellare un segnale audio.
- . . . e capito come sintetizzarlo.

A questo punto è naturale chiedersi: come possiamo modificare un segnale per ottenere effetti particolari?

# Modificare un segnale audio

Riassunto della puntata precedente:

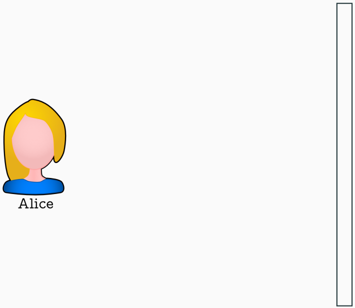
- Abbiamo visto come modellare un segnale audio.
- ...e capito come sintetizzarlo.

A questo punto è naturale chiedersi: come possiamo modificare un segnale per ottenere effetti particolari?

Dal punto di vista matematico, ci proponiamo di costruire delle trasformazioni di funzioni (il segnale $s(t)$) in altre funzioni (il nuovo segnale elaborato).

# Un problema modello

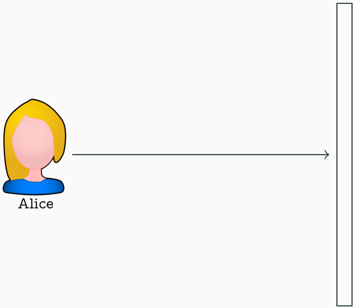
Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:




Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

# Un problema modello

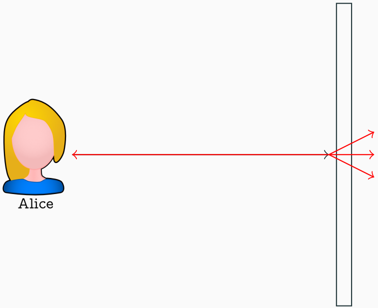
Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:




Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

# Un problema modello

Supponiamo che una persona si trovi di fronte ad un muro, e produca un suono. Seguiamo la diffusione sonora in una direzione sola:




Una parte del suono viene riflessa indietro verso Alice, che sentirà nuovamente la sua voce.

# Difficoltà nel modello

Per come abbiamo descritto il problema, il suono emesso da Alice verrebbe diffuso in ogni direzione.

- Dovremmo tenere conto di tutte queste direzioni, e verificare come viene riflesso il segnale audio quando colpisce il muro a differenti angolazioni.
- Questo richiederebbe almeno degli integrali.

Per semplificare il discorso, possiamo supporre che Alice sia un essere zero-dimensionale (i.e., un punto), che vive in uno spazio 1-dimensionale (i.e., una retta).

# Nuovo modello semplificato


- Se Alice (il punto $A$) produce un suono $s(t)$, che cosa ascolterà?
- Dobbiamo tenere conto di quanto impiega il suono ad arrivare ad $M$ e tornare.

# Nuovo modello semplificato


- Se Alice (il punto $A$) produce un suono $s(t)$, che cosa ascolterà?
- Dobbiamo tenere conto di quanto impiega il suono ad arrivare ad $M$ e tornare.

Il suono con l'aggiunta di eco sarà denotato con $s_E(t)$; avremo

$$s_E(t) = s(t) + \eta s(t - t_E), \qquad 0 < \eta < 1, \qquad t_E = \frac{2|M - A|}{v_S},$$

dove $v_S \approx 340 \ \frac{m}{s}$ è la velocità del suono e $\eta$ è il coefficiente di attenuazione.

# Modello discreto

Come per la creazione dei suoni, a noi interessa un modello che contenga un numero finito di dati. Perciò vogliamo ricavare i sampling $s_E(j \cdot \Delta t)$ a partire da $s(j \cdot \Delta t)$.

Consideriamo la discretizzazione di $s(t)$:

$$x_j = s(j \cdot \Delta t) \implies \mathrm{x} = \begin{bmatrix} s(0) & s(\Delta t) & s(2\Delta t) & s(3\Delta t) & \dots \end{bmatrix}$$

. . . e quella di $s_E(t)$:

$$\begin{aligned} x_{E,j} := s_E(j \cdot \Delta t) \implies \mathrm{x}_E &= \begin{bmatrix} s_E(0) & s_E(\Delta t) & s_E(2\Delta t) & s_E(3\Delta t) & \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dots & s(j \cdot \Delta t) + \eta s((j-m)\Delta t) & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove $m\Delta t = t_E$.

# Modello discreto (continua)

Possiamo descrivere l'operazione "aggiungere eco" in modo totalmente discreto, senza coinvolgere $s(t)$:

$$x_{E,j} = x_j + \eta x_{j-m}, \qquad m := \frac{t_E}{\Delta t} = t_E \cdot n_S,$$

dove estendiamo il vettore ponendo $x_j = 0$ per $j < 0$, e $n_S$ è il numero di campioni per secondo (nel nostro caso 44100).

# Modello discreto (continua)

Possiamo descrivere l'operazione "aggiungere eco" in modo totalmente discreto, senza coinvolgere $s(t)$:

$$x_{E,j} = x_j + \eta x_{j-m}, \qquad m := \frac{t_E}{\Delta t} = t_E \cdot n_S,$$

dove estendiamo il vettore ponendo $x_j = 0$ per $j < 0$, e $n_S$ è il numero di campioni per secondo (nel nostro caso 44100).

Questa operazione è un caso particolare di convoluzione discreta di vettori.

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & & \end{array}$$

da cui $w_0 = x_0 y_0$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{cccccc} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & & \end{array}$$

da cui $w_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_2 & x_1 & x_0 & & \end{array}$$

da cui $w_2 = x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & x_2 & x_1 & x_0 & \end{array}$$

da cui $w_3 = x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_4 = x_0 y_4 + x_1 y_3 + x_2 y_2$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \\ & & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_5 = x_1 y_4 + x_2 y_3$

# Convoluzione di vettori

Impariamo come funziona il prodotto di convoluzione di vettori su un esempio. Supponiamo di avere due vettori

$$\mathrm{x} = [x_0, x_1, x_2], \qquad \mathrm{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4].$$

La convoluzione costruisce un terzo vettore

$$\mathrm{w} = [w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ & & & & x_2 & x_1 & x_0 \end{array}$$

da cui $w_6 = x_2 y_4$.

# Convoluzione e modello discreto dell'eco

Per esempio, se nel nostro modello aggiungiamo ad un segnale discreto x un'eco con ritardo pari a 2 intervalli di sampling

$$x_{E,j} = x_j + \eta x_{j-2},$$

questa operazione equivale a calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

e il vettore x.

# Convoluzione e modello discreto dell'eco

Per esempio, se nel nostro modello aggiungiamo ad un segnale discreto x un'eco con ritardo pari a 2 intervalli di sampling

$$x_{E,j} = x_j + \eta x_{j-2},$$

questa operazione equivale a calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

e il vettore x.

Un modo alternativo per rappresentare queste trasformazioni si basa sui polinomi.

# Ripasso veloce: i polinomi

Partiamo dalle basi: cos'è un polinomio?

- Per noi, una combinazione finita di monomi del tipo $z^j$:

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_N z^N,$$

- Il grado è il massimo $j$ tale che $p_j \neq 0$.
- Un polinomio induce anche una funzione, ovvero possiamo valutarlo in un punto $\hat{z} \in \mathbb{R}$:

$$\hat{z} \mapsto p_0 + p_1 \hat{z} + \ldots + p_N \hat{z}^N \in \mathbb{R}.$$

# Vettori e polinomi

Possiamo instaurare una corrispondenza fra i vettori di lunghezza finita e i polinomi. Dato $\mathrm{x}$

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

definiamo un polinomio di grado $N$ nella variabile $z$:

$$x(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N = \sum_{j=0}^{N} x_j z^j.$$

# Vettori e polinomi

Possiamo instaurare una corrispondenza fra i vettori di lunghezza finita e i polinomi. Dato x

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

definiamo un polinomio di grado $N$ nella variabile $z$:

$$x(z) := x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_N z^N = \sum_{j=0}^{N} x_j z^j .$$

Viceversa, ad un polinomio di grado $N$ possiamo associare il vettore dei suoi $N + 1$ coefficienti.

Questa è una corrispondenza biunivoca.

# Rappresentare l'eco come polinomio

Ricordiamo che il vettore x più l'eco è definito come:

$$\mathrm{x}_E = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{m-1} & x_m + \eta x_0 & x_{m+1} + \eta x_1 & \dots & x_{N+m} + \eta x_N \end{bmatrix}.$$

**Osservazione:** Il vettore $\mathrm{x}_E$ ha come polinomio associato:

$$x_E(z) = x(z)(1 + \eta z^m).$$

In effetti, moltiplicare per $z$ significa ritardare l'input di 1 intervallo di sampling. In generale, moltiplicare per $z^m$ significa ritardare l'input di $m$ intervalli di sampling.

# Rappresentare l'eco come polinomio o come convoluzione

Abbiamo quindi due descrizioni matematiche dell'operazione "aggiungere eco ad un segnale discretizzato x":

- possiamo calcolare la convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

  e il vettore x;
- oppure, in termini di polinomi, calcolare il prodotto

$$(1 + \eta z^m)x(z).$$

# Rappresentare l'eco come polinomio o come convoluzione

Queste due descrizioni sono coerenti e intercambiabili, perché vale la proprietà:

se x e y sono vettori con polinomi associati $x(z)$ e $y(z)$, allora gli elementi del vettore w convoluzione di x e y sono proprio i coefficienti del polinomio prodotto $w(z) = x(z)y(z)$.

# Rappresentare l'eco come polinomio o come convoluzione

Possiamo anche rappresentare effetti di eco più complicati.

La sovrapposizione di due eco si calcola come convoluzione tra il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \eta_1 & 0 & \dots & 0 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

e il vettore x, oppure come il prodotto di polinomi

$$(1 + \eta_1 z^{m_1} + \eta_2 z^{m_2}) x(z).$$

# Rappresentare l'eco come polinomio o come convoluzione

La composizione di due effetti di eco è rappresentata da una doppia convoluzione tra i vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \eta_1 \end{bmatrix}$$

,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

e il vettore x, oppure come il prodotto di polinomi

$$(1 + \eta_2 z^{m_2})(1 + \eta_1 z^{m_1})x(z)$$

$$= (1 + \eta_1 z^{m_1} + \eta_2 z^{m_2} + \eta_1 \eta_2 z^{m_1 + m_2})x(z),$$

cioè corrisponde alla sovrapposizione di tre eco.