

# Matematica, musica, e computer

## Introduzione a signal processing e serie di Fourier

---

Leonardo Robol

Settimana Matematica 2022

Dipartimento di Matematica, Pisa

Gli obiettivi di questo laboratorio saranno:

- Capire come **modellizzare matematicamente** il suono.
- Sviluppare la teoria matematica per **rappresentare** suoni e musica su un **computer**.
- Simulare (i.e., scrivere un programma che generi suoni di) **strumenti musicali**.
- Applicare **effetti**.

## Gli strumenti a nostra disposizione

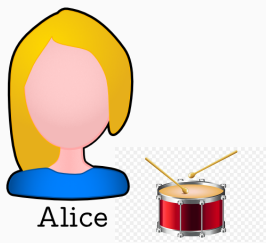
- Un **linguaggio di programmazione**: MATLAB.
- Un po' di intuizione **fisica**.
- Un po' di **trigonometria**.
- Un po' di **integrali**, e qualche conoscenza di geometria.

**Disclaimer:** Gli integrali ci serviranno, ma non daremo quasi niente per scontato.

Ecco i veri protagonisti di questi 2 giorni:



Cos'è un suono? Supponiamo di fare un esperimento mentale, in cui Alice e Bob sono a qualche metro di distanza, e Alice percuote il tamburo.



Cosa succede fisicamente? Tutti immaginiamo che Bob sentirà il suono del tamburo, ma come viene generato e trasmesso?

Descriviamo la successione di eventi:

- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.

Descriviamo la successione di eventi:

- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.
- Quando la membrana del tamburo vibra, questo causa delle variazioni di pressione locale.

Descriviamo la successione di eventi:

- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.
- Quando la membrana del tamburo vibra, questo causa delle variazioni di pressione locale.
- Queste vengono trasmesse attraverso l'aria.

Descriviamo la successione di eventi:

- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.
- Quando la membrana del tamburo vibra, questo causa delle variazioni di pressione locale.
- Queste vengono trasmesse attraverso l'aria.
- Ad un certo punto, queste variazioni di pressione raggiungono le orecchie di Bob.



Descriviamo la successione di eventi:

- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.
- Quando la membrana del tamburo vibra, questo causa delle variazioni di pressione locale.
- Queste vengono trasmesse attraverso l'aria.
- Ad un certo punto, queste variazioni di pressione raggiungono le orecchie di Bob.
- Questo manda in risonanza alcune parti dell'orecchio, che poi trasmettono un segnale elettrico ai nervi e da lì fino al cervello.

Descriviamo la successione di eventi:

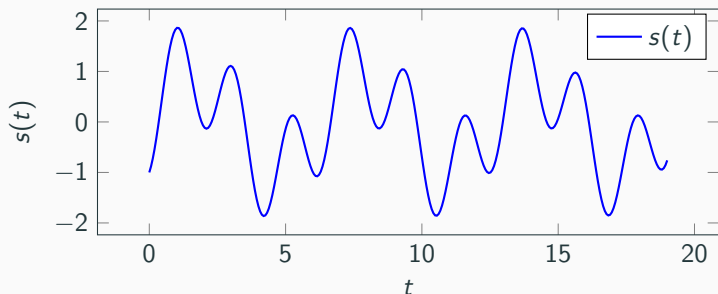
- Prima che il tamburo venga percosso, la pressione dell'aria è costante nella zona circostante.
- Quando la membrana del tamburo vibra, questo causa delle variazioni di pressione locale.
- Queste vengono trasmesse attraverso l'aria.
- Ad un certo punto, queste variazioni di pressione raggiungono le orecchie di Bob.
- Questo manda in risonanza alcune parti dell'orecchio, che poi trasmettono un segnale elettrico ai nervi e da lì fino al cervello.
- Bob sente il tamburo.

# Realizzare un modello matematico

Per progettare il modello, facciamo alcune osservazioni:

- Il suono, secondo la nostra descrizione, corrisponde a **variazioni di pressione**.
- Per l'ascoltatore (in questo caso Bob) l'unica cosa rilevante sono le variazioni di pressioni **locali** nel suo orecchio.

Dunque, per rappresentare un suono possiamo modellare la variazione di pressione nel tempo, all'orecchio dell'ascoltatore; chiameremo questa funzione  $s(t)$ . Ad esempio, potrebbe assomigliare a questa:



Il nostro orecchio non rileva la pressione sonora istantanea, ma solo le variazioni che si ripetono nel tempo.

L'orecchio riconosce naturalmente segnali periodici di periodo  $T$ , ovvero funzioni tali che

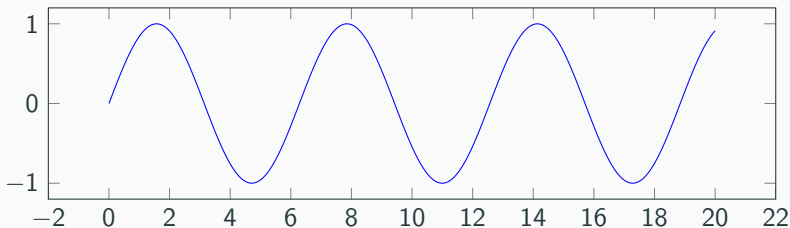
$$s(t + kT) = s(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- Se una funzione ha **periodo**  $T$ , allora ha **frequenza**  $\frac{1}{T}$ . La frequenza si misura in Hz, definiti come  $\frac{1}{s}$ .
- Il nostro orecchio è in grado di riconoscere ampiezza, frequenza e forma della funzione. Queste vengono percepite rispettivamente come volume, altezza, e timbro.

## Un esempio

Consideriamo la funzione periodica  $s(t) = A \sin(2\pi\omega t)$ .

- Il periodo è  $\frac{1}{\omega}$ , e la frequenza  $\omega$ .
- La costante  $A$  regola l'intensità del volume.
- La forma è quella della funzione seno.



Che “suono” avrebbe questa funzione? Proviamo ad ascoltarlo.

Il modello di suono che abbiamo fino ad ora considerato utilizza funzioni su un continuo, i.e., definite su un intervallo  $[0, T)$ . Noi, però, vorremmo rappresentare l'audio su un computer.

- Un computer ha una quantità di memoria finita, mentre il numero di valori della funzione fra 0 e  $T$  è un numero **infinito** — ed anche piuttosto grande!
- Possiamo ovviare al problema considerando i valori della funzione solamente in un numero discreto di punti, ad esempio:

$$0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, N\Delta t = T.$$

- Quanta informazione perdiamo in questo passaggio? Possiamo ricostruire il suono originale dalla sua misurazione in un numero finito di punti?

Cerchiamo di formalizzare questa riduzione.

- Consideriamo  $s(t)$  una funzione  $s(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Fissiamo un intero  $N > 0$ , e definiamo una sequenza di punti  $x_j$

$$x_j := s(j\Delta t), \quad \Delta t := \frac{T}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

**Osservazioni:** data  $s(t)$  e fissato  $N$ , il vettore  $x_j$  è **completamente determinato**. Il processo inverso, però, non è univoco!

Perché?

Scegliamo  $T = 1$ , e  $\Delta t = \frac{1}{12}$ .

- Se consideriamo  $s_1(t) = \sin(6\pi t)$ , otteniamo

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

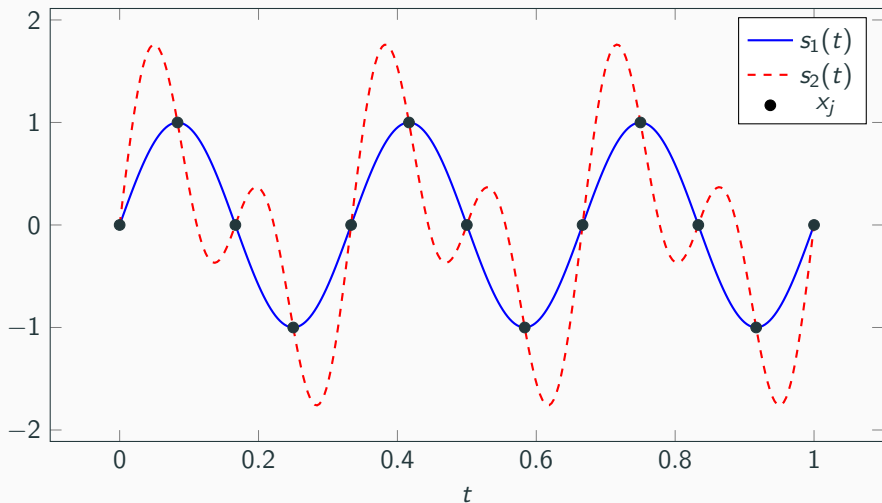
- Se invece prendiamo  $s_2(t) = 2 \sin(9\pi t) \cos(3\pi t)$ , cosa succede? Non troppo sorprendentemente, i due vettori sono esattamente uguali:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le funzioni  $s_1(t)$ , e  $s_2(t)$  però sono distinte.



## Un esempio (continua)



Questo fenomeno è noto come **aliasing**.

## La situazione non è poi grave come sembra

- L'idea di misurare il segnale solo in un insieme finito è alla base di tutto l'audio digitale moderno — evidentemente non funziona così male.
- Abbiamo però visto che è possibile perdere molta informazione.

Fortunatamente, è possibile prendere degli accorgimenti perché questo non impatti sul nostro ascolto.

### **Teorema (Shannon-Nyquist)**

*Sia  $s(t)$  un segnale ottenuto sovrapponendo segnali con frequenze comprese in un intervallo  $[0, B]$ , ovvero tale che*

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots,$$

*e  $s_j(t)$  sia di periodo  $T$  con  $\frac{1}{T} \in [0, B]$ . Allora, la trasformazione da  $s(t)$  al vettore discreto  $x_j = s(j\Delta t)$  è univoca se  $\Delta t < \frac{1}{2B}$ .*

Il teorema di Shannon ci dice: a patto di non dover rappresentare frequenze troppo alte, il suono è sempre recuperabile scegliendo un  $\Delta t$  sufficientemente piccolo.

Il teorema di Shannon ci dice: a patto di non dover rappresentare frequenze troppo alte, il suono è sempre recuperabile scegliendo un  $\Delta t$  sufficientemente piccolo.

- Quali frequenze sono di interesse per noi?
- ...e di conseguenza quanto va scelto questo  $\Delta t$ ?

# Frequenze udibili

- L'uomo può sentire solo frequenze fra 20 Hz e 20.000 Hz.
- Il limite superiore si abbassa notevolmente con l'età, fino a scendere anche sotto i 10.000 Hz.

Tutto quello che sta sotto i 20 Hz viene chiamato **infrasuono**, quello che sta sopra i 20.000 Hz **ultrasuono**.

- Nel rappresentare l'audio, è chiaro che questo ci dà un valore massimo per la frequenza  $B$  nel teorema di Shannon.
- Per rappresentare correttamente i 20.000 Hz, dobbiamo scegliere

$$\Delta t \leq \frac{1}{2B} \leq \frac{1}{40000} \text{ s},$$

che implica una frequenza di registrazione superiore a 40000 Hz.

# Un viaggio negli anni '70

Immaginiamo di tornare a  $\sim 40$  anni fa, dove alla Philips e alla Sony stavano progettando il primo CD audio.

- A quei tempi, erano ben consapevoli del teorma di Shannon, e dunque sapevano di doversi tenere sopra ai 40000 Hz.
- Tuttavia, nessuno voleva dare vantaggio al concorrente nel poter usare tool già a disposizione, e quindi litigarono parecchio fra 44000 Hz, 44100, 44056, e altre varianti.
- Alla fine vinse la Sony con 44100 Hz, che è diventato lo standard nei CD audio, e in molta musica digitale.

In alcune applicazioni si utilizzano altre frequenze, come 48 kHz, o 96 kHz. Alcuni tipi di trasmissioni utilizzando basse frequenze come 11025 Hz o 22050 Hz.

Riassumiamo la struttura del nostro modello:

- Un suono si può rappresentare matematicamente come una funzione  $s(t)$ , definita sull'intervallo di tempo  $[0, t_{\max}]$  di interesse.
- Se questo suono corrisponde ad un'unica nota prodotta da uno strumento musicale, la funzione  $s(t)$  è periodica di periodi  $T = \frac{1}{f}$ , con  $f$  uguale alla frequenza della nota scelta.
- La *forma* di questa funzione periodica determina il timbro dello strumento che ascoltiamo.

Ma come si ricava la frequenza di una determinata nota?

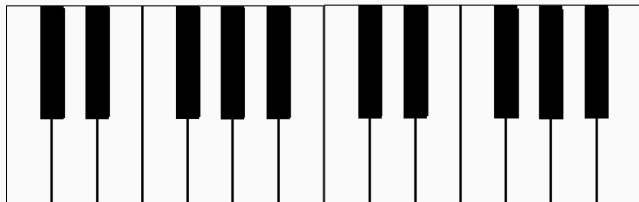
## Il La a 440 Hz, e le altre note

Prendiamo un riferimento iniziale: il la sopra il Do centrale nella tastiera del pianoforte ha — per convenzione — la frequenza di 440 Hz.

Tutte le altre note si possono ricavare con le seguenti osservazioni:

- Per salire di un'ottava, basta **raddoppiare** la frequenza, per scendere bisogna **dimezzarla**.
- Le altre note sono distribuite uniformemente in scala **logaritmica**.

Possiamo chiarirci le idee guardando la tastiera di un pianoforte.





Chiamiamo  $f_{Do}$  la frequenza del Do centrale.

Per salire di un semitono (e raggiungere il Do $\sharp$ ), abbiamo bisogno di moltiplicare la frequenza per un numero positivo  $\lambda_s > 1$ .

Dunque:

$$f_{Do\sharp} = f_{Do}\lambda_s, \quad f_{Re} = f_{Do\sharp}\lambda_s = f_{Do}\lambda_s^2, \quad \dots$$

La frequenza del Do sopra il Do centrale (chiamiamolo temporaneamente Do2), soddisferà dunque:

$$f_{Do2} = 2f_{Do} = f_{Do}\lambda_s^{12},$$

perché ci sono esattamente 12 semitoni in un'ottava. Dunque,  $\lambda_s = \sqrt[12]{2}$ .

# La scala logaritmica

- Il nostro orecchio percepisce l'**altezza** dei suoni in modo naturale secondo questa scala.
- Questo non vale solo per l'altezza, ma anche per il **volume**! In effetti, anche questo si misura in decibel che è un modo implicito per tenere traccia di  $\log(A)$  invece che di  $A$ , dove  $A$  è la massima ampiezza del segnale.

Come possiamo calcolare efficacemente la frequenza di una nota?

- Supponiamo di sapere la frequenza  $f_{D_0}$  del Do centrale.
- Determiniamo i  $j$  semitoni di differenza.
- Allora

$$f = f_{D_0} \cdot \sqrt[12]{2^j} \iff f = 2^{\log_2(f_{D_0}) + \frac{j}{12}}$$

## Un prototipo di sintetizzatore

Supponiamo di voler scrivere un programma che suoni un Do per un secondo, poi un Re, e poi un Mi. Secondo la nostra regola:

$$f_{Do} \approx 523 \text{ Hz}, \quad f_{Re} \approx 587 \text{ Hz}, \quad f_{Mi} \approx 659 \text{ Hz}$$

Dunque, possiamo definire:

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_{Do} t) & 0 \leq t < 1 \\ \sin(2\pi f_{Re} t) & 1 \leq t < 2 \\ \sin(2\pi f_{Mi} t) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Dovendola assemblare su un computer, valuteremo  $s(t)$  solo nei punti  $t = \Delta t \cdot j$ , con  $\Delta t = \frac{1}{44100}$ .

Ci manca però un fattore fondamentale: questa funzione avrà la “forma” giusta?

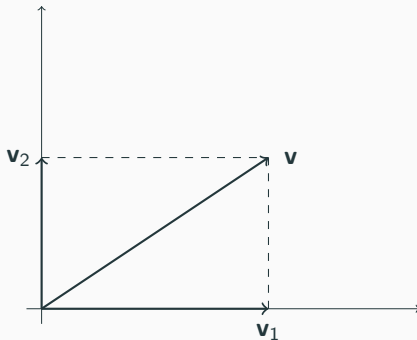
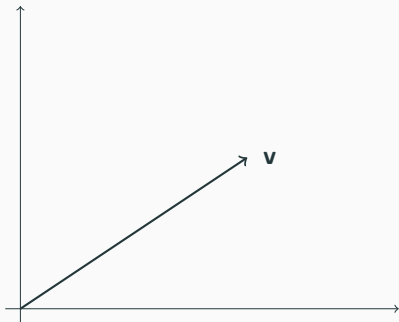
Se vogliamo davvero realizzare un sintetizzatore, ci rimane da risolvere il problema più annoso: come realizziamo una funzione  $s(t)$  periodica ma con la “forma” giusta?

Per rispondere a questa domanda, abbiamo bisogno di un detour per argomenti apparentemente scorrelati, ovvero **vettori** e **prodotti scalari**.

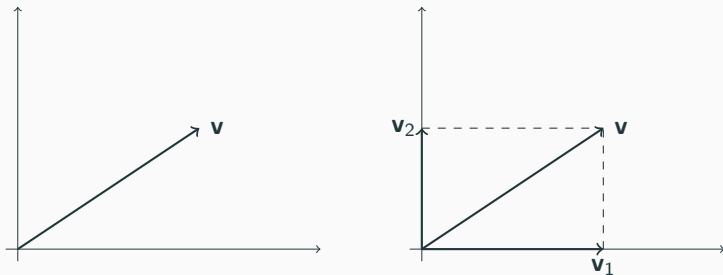
# Vettori

Cos'è un vettore? Per il momento non ci preoccupiamo di dare una definizione precisa, e partiamo da un esempio: i vettori all'interno del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

Graficamente, possiamo rappresentare un vettore  $\mathbf{v}$  e leggere le sue componenti lungo l'asse delle  $x$  e delle  $y$ .



## Sistemi di riferimento ortogonali



Le componenti  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono semplicemente una delle tante decomposizioni additive di  $\mathbf{v}$ , ovvero una scrittura di  $\mathbf{v}$  come  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ .

- $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono multipli di due vettori di lunghezza unitaria lungo l'asse  $x$  ed  $y$ , che chiamiamo  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ . In particolare,

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{e}_2$$

Vorremo tradurre cosa significa trovare le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  in modo più formale.

- Possiamo definire un *prodotto scalare*.
- In astratto, è semplicemente una funzione  $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  che “mangia” due vettori e restituisce un numero.
- La notazione tipica è  $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) =: \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .
- Intuitivamente, risponde alla domanda: quanto del vettore  $v$  è lungo il vettore  $w$ ?

Possiamo rendere questa definizione formale, chiedendo che  $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  soddisfi alcune **proprietà**.

## Proprietà dei prodotti scalari

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0,$$

$$\langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle,$$

per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



# Proprietà dei prodotti scalari

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &\geq 0, & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 &\iff \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \\ \langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, & \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \\ \langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.\end{aligned}$$

per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Esempio di prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$  con cui si ha normalmente più familiarità:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \cos(\theta),$$

dove  $\|\cdot\|$  indica la **lunghezza Euclidea**, e  $\theta$  è l'**angolo "interno"** fra due vettori.

## Scegliere un sistema di riferimento

Ricordiamo che, in  $\mathbb{R}^2$ , abbiamo identificato i vettori  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$  come nostro sistema di riferimento “principale”.

Verifichiamo immediatamente che:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

## Scegliere un sistema di riferimento

Ricordiamo che, in  $\mathbb{R}^2$ , abbiamo identificato i vettori  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$  come nostro sistema di riferimento “principale”.

Verifichiamo immediatamente che:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

Combinandolo con le proprietà sopra questo ci dà una via operativa per recuperare i coefficienti  $v_1$  e  $v_2$  tali che  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ . Infatti,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = v_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + v_2\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = v_1,$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = v_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + v_2\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = v_2,$$

# Rappresentazione in coordinate

Se fissiamo la nostra scelta di vettori  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ , allora possiamo identificare  $\mathbf{v}$  tramite le sue *coordinate*, ovvero i numeri  $v_1, v_2$ , e scriviamo

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Take-home message:

- Dato un vettore, posso misurare le sue componenti lungo varie direzioni con **prodotti scalari**.
- Questo mi dà una rappresentazione del vettore in **coordinate**.
- Sebbene stiamo descrivendo un fatto geometrico, tutta questa costruzione è puramente **algebraica**.

Abbiamo preso familiarità con il (o meglio un) prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ .

- La stessa idea si potrebbe estendere in **più dimensioni**; in 3D, avremo bisogno di 3 vettori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  per “costruire” tutti gli altri.
- Allo stesso tempo, la scelta che abbiamo fatto di  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  non è necessariamente l'unica possibile: ad esempio, cosa succede se invece che  $\mathbf{e}_2$  scegliamo  $-\mathbf{e}_2$ ?

## In più dimensioni

Abbiamo preso familiarità con il (o meglio un) prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ .

- La stessa idea si potrebbe estendere in **più dimensioni**; in 3D, avremo bisogno di 3 vettori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  per “costruire” tutti gli altri.
- Allo stesso tempo, la scelta che abbiamo fatto di  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  non è necessariamente l'unica possibile: ad esempio, cosa succede se invece che  $\mathbf{e}_2$  scegliamo  $-\mathbf{e}_2$ ?

La proprietà che fa funzionare veramente le cose è che  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ , ovvero che i vettori siano ortogonali, e che  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$  per ogni  $i$ . In più dimensioni, chiederemo sempre che:

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

## Torniamo alle funzioni periodiche

Sia  $s(t)$  un segnale periodico di frequenza  $\omega$ . Possiamo decomporlo in termini di segnali “elementari”, come **seni e coseni**?

Ad esempio, è chiaro che, per ogni scelta di coefficienti  $a_i$  per  $i = 0, \dots, k$  e  $b_i$  per  $i = 1, \dots, k$ , la funzione

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots + a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

sia una **funzione periodica** su  $[0, 2\pi]$ .

## Torniamo alle funzioni periodiche

Sia  $s(t)$  un segnale periodico di frequenza  $\omega$ . Possiamo decomporlo in termini di segnali “elementari”, come **seni e coseni**?

Ad esempio, è chiaro che, per ogni scelta di coefficienti  $a_i$  per  $i = 0, \dots, k$  e  $b_i$  per  $i = 1, \dots, k$ , la funzione

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots + a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

sia una **funzione periodica** su  $[0, 2\pi]$ .

Possiamo, data  $s(t)$ , trovare le sue componenti  $a_i, b_i$  “lungo le funzioni”

$$1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \dots$$



## Un prodotto scalare per funzioni

- Immaginiamo che  $s(t)$ , una funzione periodica su  $[0, 2\pi]$ , sia il nostro vettore  $\mathbf{v}$ .
- Vogliamo un prodotto scalare che “misuri” quanto delle funzioni di base che abbiamo scelto c'è in  $s(t)$ .

# Un prodotto scalare per funzioni

- Immaginiamo che  $s(t)$ , una funzione periodica su  $[0, 2\pi]$ , sia il nostro vettore  $\mathbf{v}$ .
- Vogliamo un prodotto scalare che “misuri” quanto delle funzioni di base che abbiamo scelto c'è in  $s(t)$ .

Questioni aperte:

- Come si trova questo prodotto scalare?
- Ogni funzione periodica si scrive come combinazione di queste funzioni più semplici?
- Come gestiamo un sistema di riferimento con numero infinito di elementi?

## Un candidato prodotto scalare

Consideriamo questa funzione come prodotto scalare fra  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ :

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_1(t)s_2(t) dt.$$

- Questa funzione definisce veramente un **prodotto scalare**, ovvero, rispetta le proprietà che abbiamo listato in precedenza?
- Il nostro sistema di riferimento soddisfa la proprietà di **ortogonalità**

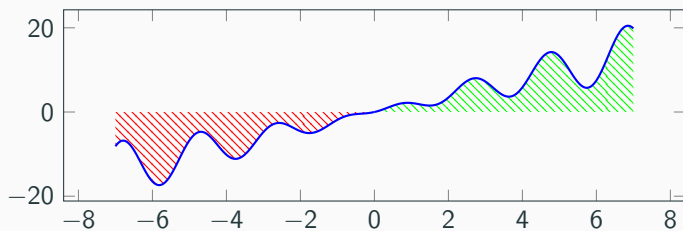
$$\langle \cos(it), \cos(jt) \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

$$\langle \sin(it), \sin(jt) \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

$$\langle \cos(it), \sin(jt) \rangle = 0$$

Nel caso non avessimo eccessiva familiarità con gli integrali, per ora ci basta ricordare che

$$\int_a^b f(t) dt = \text{"Area sottesa al grafico di } f(t) \text{ fra } a \text{ e } b\text{"},$$



il che in particolare permette di mostrare abbastanza facilmente che:

$$\int_0^{2\pi} f_1(t) + f_2(t) dt = \int_0^{2\pi} f_1(t) dt + \int_0^{2\pi} f_2(t) dt.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)}{2} = \cos(it) \cos(jt),$$

come si può osservare con le usuali formule per  $\cos(\alpha \pm \beta)$ .

Osserviamo che:

$$\frac{\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)}{2} = \cos(it) \cos(jt),$$

come si può osservare con le usuali formule per  $\cos(\alpha \pm \beta)$ .

Allora per  $\langle \cos(it), \cos(jt) \rangle$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle \cos(it), \cos(jt) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(it) \cos(jt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i+j)t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i-j)t) dt. \end{aligned}$$

Quanto fa  $\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt$ , per  $n \in \mathbb{N}$ ?

# Integrale del coseno

Quanto fa

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = ?$$

# Integrale del coseno

Quanto fa

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = ?$$

Per  $n = 0$ ,  $\cos(nt) \equiv 1$ .



# Integrale del coseno

Quanto fa

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = ?$$

Per  $n = 0$ ,  $\cos(nt) \equiv 1$ .

Per  $n > 0$ , possiamo darne una “dimostrazione grafica”.

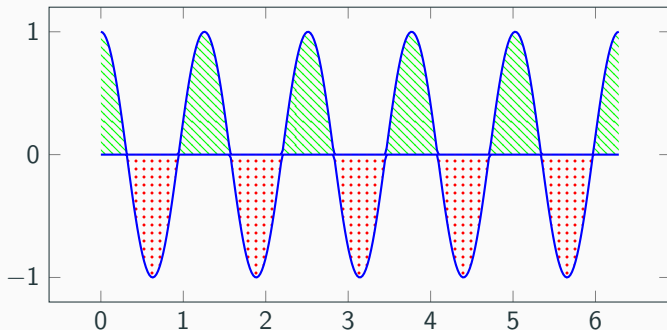
# Integrale del coseno

Quanto fa

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = ?$$

Per  $n = 0$ ,  $\cos(nt) \equiv 1$ .

Per  $n > 0$ , possiamo darne una “dimostrazione grafica”.



## Integrale del coseno

Dunque abbiamo, per  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

# Integrale del coseno

Dunque abbiamo, per  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Tornando al problema originale  $\langle \cos(it), \cos(jt) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \cos(it), \cos(jt) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(it) \cos(jt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i+j)t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i-j)t) dt. \end{aligned}$$

# Integrale del coseno

Dunque abbiamo, per  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Tornando al problema originale  $\langle \cos(it), \cos(jt) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \cos(it), \cos(jt) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(it) \cos(jt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i+j)t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((i-j)t) dt. \end{aligned}$$

e dunque

$$\langle \cos(it), \cos(jt) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \neq 0 \\ 2 & \text{se } i = j = 0 \end{cases}.$$

Lo stesso vale per i seni, e per i prodotti incrociati fra seni e coseni.

Dunque, se

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots + a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

allora

$$a_i = \langle s(t), \cos(it) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(it) s(t) dt,$$

$$b_i = \langle s(t), \sin(it) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(it) s(t) dt.$$

- Abbiamo trovato un modo di decomporre una somma di seni e coseni usando dei prodotti scalari, e misurare quanto di una certa frequenza c'è all'interno di un segnale.
- Questo ci permette di **rappresentare molto forme d'onda** come combinazioni di seni e coseni, che sono semplici da costruire!
- Come si **ottengono i coefficienti**  $a_i, b_i$ ? Per ora, ci fideremo del computer che sa approssimare molto bene quegli integrali.
- Problemi aperti: quante forme d'onda si possono rappresentare? Cosa succede se il numero di componenti sono infinite?

È il momento di passare alla pratica:

<https://leonardo.robol.it/teaching/matematica-e-musica-2022/>

## Convergenza

In effetti, nessuno ci obbliga a fermarci a sommare un numero finito di funzioni seno e coseno, e possiamo estendere l'interesse a funzioni del tipo:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos(it) + b_i \sin(it)). \end{aligned} \tag{1}$$

È naturale chiedersi se ogni funzione periodica su  $[0, 2\pi]$  debba per forza essere del tipo sopra, per qualche opportuna scelta di  $a_i, b_i$ .



# Convergenza

In effetti, nessuno ci obbliga a fermarci a sommare un numero finito di funzioni seno e coseno, e possiamo estendere l'interesse a funzioni del tipo:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos(it) + b_i \sin(it)). \end{aligned} \tag{1}$$

È naturale chiedersi se ogni funzione periodica su  $[0, 2\pi]$  debba per forza essere del tipo sopra, per qualche opportuna scelta di  $a_i, b_i$ .

Determinare esattamente quando questo succede (e come succede) ha impegnato molto i matematici alla fine del XIX secolo. Come regola generale, più la funzione è “regolare”, più è veloce la sua convergenza.

Chiamiamo  $s_k(t)$  per  $k = 0, 1, \dots$  la somma parziale dei coefficienti di Fourier ottenuta sommando fino all'indice  $k$ . Per cui:

$$s_0(t) = \frac{a_0}{2}, \quad s_1(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t), \quad \dots$$

## Esempi di convergenza

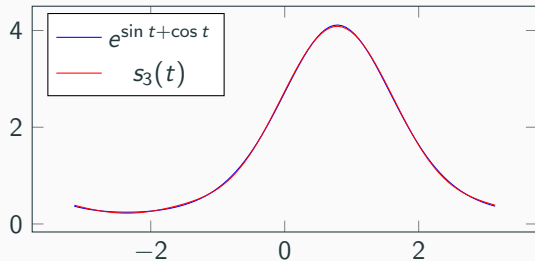
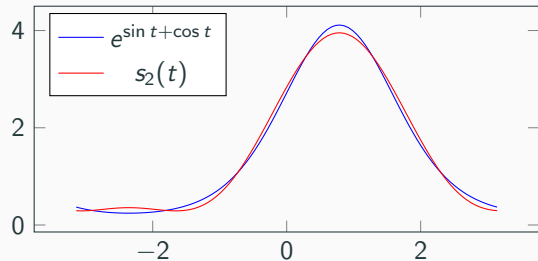
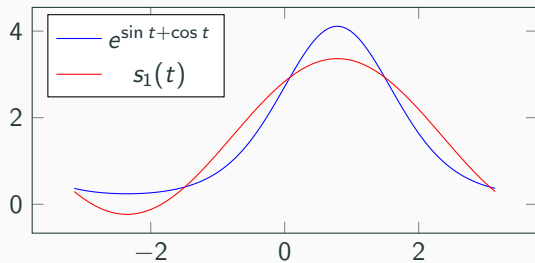
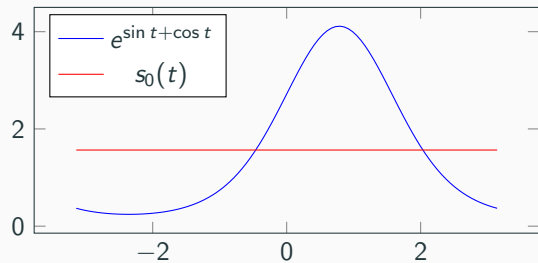
Facciamo qualche esempio per chiarirci le idee. Consideriamo la funzione  $s(t) = e^{\sin t + \cos t}$ , definita sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , e osserviamo che:

- La funzione  $s(t)$  è **periodica di periodo  $2\pi$** , i.e., se la estendessimo su tutto  $\mathbb{R}$  avremmo  $s(t + 2k\pi) = s(t)$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ .
- La funzione è  $C^m$  per ogni  $m \geq 0$ , ovvero è  $C^\infty$ : possiamo **derivarla un numero arbitrario di volte**, e otterremo sempre una funzione continua (e periodica!).
- La funzione non è data da una somma finita di seni e coseni, i.e.,

$$s(t) \neq \sum_{i=0}^k a_i \cos(it) + b_j \sin(it)$$

per ogni scelta di  $a_i, b_j$  e  $k$  finito.

# Convergenza per una funzione $C^\infty$

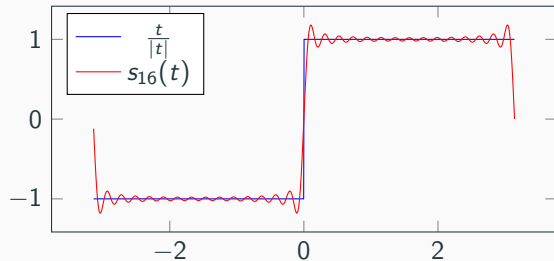
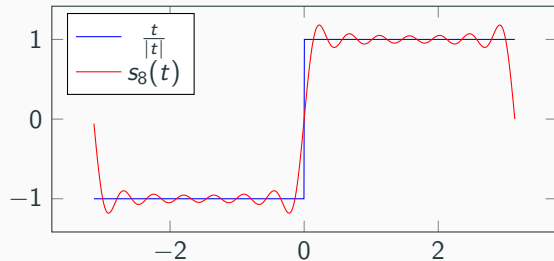
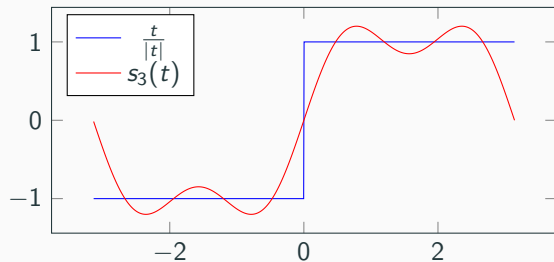
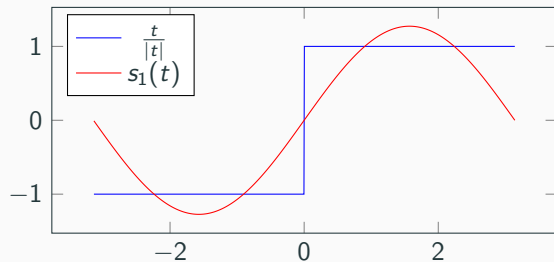


Consideriamo invece un esempio di funzione discontinua, come  $s(t) = \frac{t}{|t|}$ , definita sempre su  $[-\pi, \pi]$ , e posta uguale a 0 in 0. Questa funzione vale  $-1$  sui numeri negativi, e  $1$  su quelli positivi.

Dunque, il suo grafico fa un “salto” di altezza 2 ad  $t = 0$ . Seni e coseni sono funzioni continue, e lo stesso vale per le loro somme.

Cosa ci aspettiamo dalla convergenza?

## Un esempio più critico (con fenomeno di Gibbs)



Lo stesso fenomeno si riscontra, anche se in maniera più debole, con un rallentamento della convergenza per funzioni la cui derivata (oppure la derivata  $m$ -esima, per qualche  $m$ ) non è continua.

## Commenti finali sulla convergenza

Lo stesso fenomeno si riscontra, anche se in maniera più debole, con un rallentamento della convergenza per funzioni la cui derivata (oppure la derivata  $m$ -esima, per qualche  $m$ ) non è continua.

Data una funzione con  $m$  derivate continue, le somme di Fourier convergeranno a questa funzione in modo polinomiale:

$$|s(t) - s_j(t)| \leq Cj^{-m},$$

Se invece la funzione ha un numero infinito di derivate continue, come ad esempio  $s(t) = e^{\sin t + \cos t}$  che abbiamo considerato in precedenza, allora la convergenza sarà più veloce di ogni polinomio, e avremo

$$|s(t) - s_j(t)| \leq C\rho^j$$

per un'opportuna costante  $C$  ed un numero reale  $0 < \rho < 1$ .