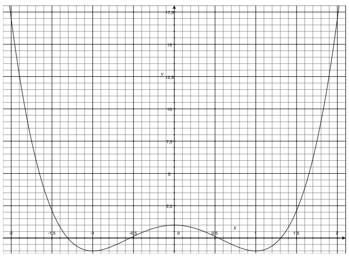
Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta dell' 8 gennaio 2008

1. Se $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ è definita da $f(x) := 2x^4 - 4x^2 + 1$, allora (PUNTI: 1/-1/0 a risposta)

f ha un unico punto di massimo	no
f ha un unico minimo	si
1 è massimo per f	no
2 è un massimo relativo per f	no
2 è stazionario per f	no
0 è un punto di massimo relativo per f	si

Spiegazione. Facendo un rapido studio di funzione (vedi la figura) si vede che:

- il massimo di f vale 17 ed è assunto nei punti -2 e 2 che sono due e non sono stazionari;
- il minimo di f vale -1 ed è assunto nei punti -1 e 1 che sono stazionari;
- il punto 0 è stazionario ed è di massimo relativo per f di valore 1 (che dunque è un massimo relativo ma non assoluto);
- come fatto generale il massimo e il minimo (se esistono) sono unici, essendo i *valori* massimo e minimo.



□

2. Si trovi il valore dei seguenti limiti (PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+1} - \sqrt[n]{n^5+n^4+1} =$	0	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n^3} =$	3
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-2)!} =$	$+\infty$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} =$	1

Spiegazione.

- È noto da quanto fatto a lezione che, se $P(x)$ è un polinomio, allora $\sqrt[n]{P(n)} \to 1$: dunque $\sqrt[n]{n^5+1} - \sqrt[n]{n^5+n^4+1} \to 1 - 1 = 0$;
- $\sqrt[n]{3^n+n^3} = 3\sqrt[n]{1+n^3/3^n} \to 3$;
- si ha $\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!} = n-1 \to +\infty$ e quindi applicando Cesaro $\sqrt[n]{(n-2)!} \to +\infty$;
- dato che $1 \le \ln(n) \le n$ si ha $1 \le \sqrt[n]{\ln(n)} \le \sqrt[n]{n}$; essendo $\sqrt[n]{n} \to 1$ si deduce $\sqrt[n]{\ln(n)} \to 1$, per i due carabinieri.

□

3. Data f definita da $f(x) := e^{x-1} + Ax$ si ha (PUNTI: 2/-0,5/0 per risposta)

$$(f^{-1})'(1+A) = \frac{1}{1+A}.$$

Spiegazione. Si ha $f(1) = e^0 + A = 1 + A$, da cui $f^{-1}(1+A) = 1$. Inoltre $f'(x) = e^{x-1} + A$ e quindi $f'(1) = e^0 + A = 1 + A$. Applicando la formula sulla derivata della funzione inversa si ottiene $(f^{-1})'(1+A) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{1+A}$. □

4. Si calcoli il limite seguente - questo esercizio va svolto e vale 6 punti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(1+\sqrt{1-x}) - \ln(16) + x}{1-\cos(x)}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} =& 1 + \frac{-x}{2} - \frac{(-x)^2}{8} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2);\\
\ln(1+\sqrt{1-x}) =& \ln\left(1 + 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = \ln\left(2\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)\right) =\\
& \ln(2) + \left(-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4} + o(x)\right)^2 + o\left(O(x)^2\right) =\\
& \ln(2) - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{32} + o(x^2) = \ln(2) - \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + o(x^2) \Rightarrow\\
4\ln(1+\sqrt{1-x}) =& 4\ln(2) - x - \frac{3x^2}{8} + o(x^2) = \ln(16) - x - \frac{3x^2}{8} + o(x^2);\\
1 - \cos(x) =& \frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi considerando l'espressione da mandare al limite:

$$\frac{4\ln(1+\sqrt{1-x}) - \ln(16) + x}{1-\cos(x)} = \frac{-\frac{3x^2}{8} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \to \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}.$$

□

5. Si trovi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$) converge assolutamente/ $\boxed{\text{C}}$ converge ma non assolutamente/ $\boxed{\text{NC}}$ non converge) (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^4}$	$\boxed{\text{AC}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$	$\boxed{\text{AC}}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sin(n^4)}$	$\boxed{\text{NC}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$	$\boxed{\text{C}}$

Spiegazione.

- Dato che $\frac{|\sin(n)|}{n^4} \le \frac{1}{n^4}$ e che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^4}$ converge assolutamente;
- notiamo innanzitutto che $\sin\left(\frac{1}{n^4}\right) > 0$ e quindi convergenza e convergenza assoluta coincidono; dato che $\sin(x) = x + o(x)$, si deduce che $\sin\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$ converge per il criterio del confronto (usando sempre il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$);
- dato che $\frac{1}{\sin(n^4)}$ non può tendere a zero, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sin(n^4)}$ non può convergere;
- dato che $\sin(k\pi) = 0$ per ogni k intero si ha che $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ se n è pari, viceversa $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ vale alternativamente 1 e -1 sugli n dispari; allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$ è equivalente a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$: quest'ultima, come ben noto, è convergente (per Leibniz) senza essere assolutamente convergente.

□

6. Siano $f(x,y) := x^2 - y^2$, $f_1(x,y) := y^2 - x^2$) e $A := \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \le 1\}$. Allora (PUNTI: 4/-1/0).

$$\max_A f = 1, \qquad \min_A f = -\frac{1}{4} \qquad ; \qquad \max_A f_1 = \frac{1}{4}, \qquad \min_A f_1 = -1.$$

Spiegazione. Condideriamo f (compiti A e B). È facile verificare che $\nabla f(x,y) = \binom{2x}{-2y}$ e quindi l'unico punto stazionario è $\binom{0}{0}$. Cerchiamo il punti sulla frontiera di A che verificano il criterio dei moltiplocatori di Lagrange. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x &= \lambda x \\ -y &= \lambda 4y \\ x^2 + 4y^2 &= 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = \pm 1, y = 0, \lambda = 1$ e $x = 0, y = \pm\frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{4}$. Quindi il massimo e il minimo devono trovarsi in uno dei tre punti $\binom{0}{0}$, $\binom{\pm 1}{0}$, $\binom{0}{\pm\frac{1}{2}}$. Calcolando f in tali punti si trova

$$f(\pm 1, 0) = 1, \qquad f\left(0, \pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \qquad f(0,0) = 0$$

da cui la conclusione. Nel caso di f_1 (compiti C e D) il risultato si ottiene con calcoli analoghi. □

7. Si calcoli il seguente integrale (PUNTI: 4/-0/0)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(A+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{A}}.$$

Spiegazione. Se operiamo la sostituzione $y = \sqrt{x/A}$ troviamo $x = Ay^2$ e $dx = 2Aydy$ e quindi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(A+x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2Ay}{\sqrt{A}y(A+Ay^2)}\,dy = \frac{2}{\sqrt{A}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{A}}\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{A}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{A}}.$$

□

8. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x} - \frac{1}{x+1} \qquad x > 0.$$

Si studino le soluzioni trovando in particolare (8 punti in tutto - da svolgere):

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(1) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- i limiti a 0^+ e a $+\infty$ della soluzione (al variare di y_0);
- i grafici (per $x \ge 0$) relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una soluzione $x > 0$.

.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = x^2\left(y_0 - \int_1^x \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt\right) = x^2\left(y_0 - \int_1^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-1}{t^2}\right)dt\right) = x^2\left(y_0 - \left[\ln(t+1) - \ln(t) - \frac{1}{t}\right]_1^x\right) =$$

$$x^2\left(y_0 - 1 + \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\right) = x\left(x(y_0 - 1 + \ln(2)) + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1\right) =$$

$$x^2\left(y_0 - 1 + \ln(2)\right) + x^2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + x$$

Dalle formule scritte sopra si ricava facilmente che:

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} x\left(x(y_0 - 1 + \ln(2)) + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1\right) = 0^+$$

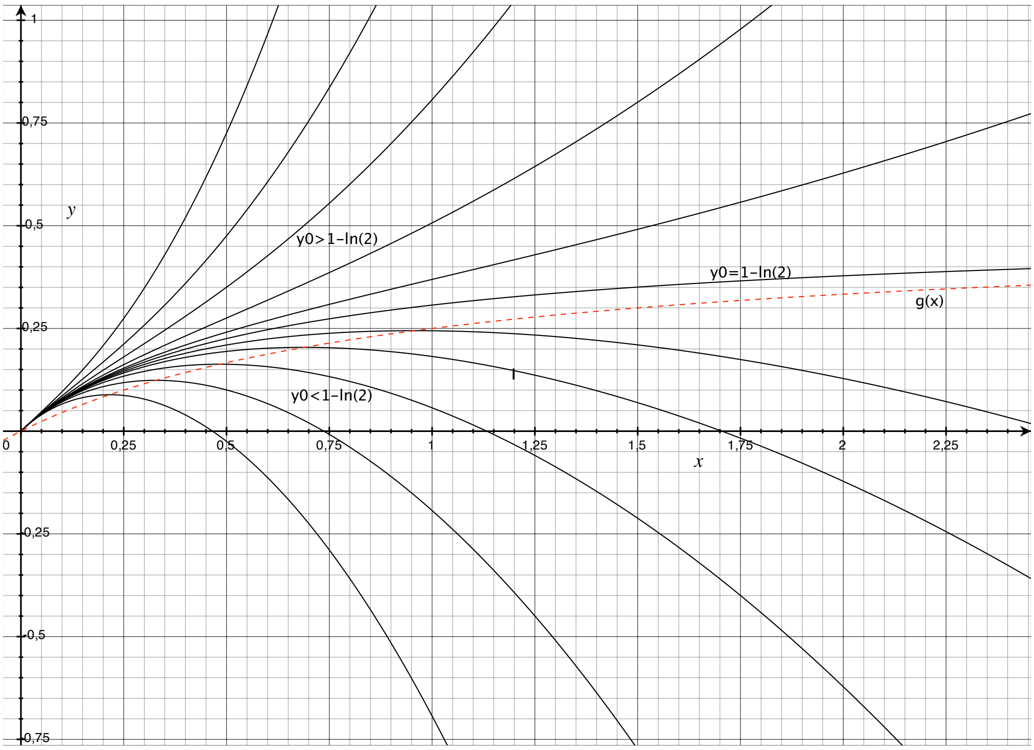
(qualunque sia $y:0$) mentre

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(y_0 - 1 + \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > 1-\ln(2) \\ \frac{1}{2} & \text{se } y_0 = 1-\ln(2) \\ -\infty & \text{se } y_0 < 1-\ln(2) \end{cases}$$

dove nel caso di mezzo il limite segue da:

$$x^2\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\right) =$$
$$x^2\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \to \frac{1}{2}.$$

Per tracciare i grafici delle soluzioni conviene introdurre la curva g di equazione $g(x) = \frac{x}{2x+2}$; per la forma dell'equazione é chiaro che $y'(x) > 0$ se e solo se $y(x) > g(x)$, $y'(x) < 0$ se e solo se $y(x) < g(x)$ e $y'(x) = 0$ se e solo se $y(x) = g(x)$. Se tracciamo il grafico di g (vedi curva rossa tratteggiata nella figura) e teniamo conto dei limiti a 0^+ e all'infinito, troviamo i grafici delle soluzioni come rappresentati nella figura.



Dai grafici risulta chiaro che le soluzioni intersecano l'asse x in un punto positivo se e solo se tendono a meno infinito, cioé se $y_0 < 1 - \ln(2)$. $\square$