

ESERCIZI proposti

1. Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y)$ nell'insieme indicato.

a. $x^2 y + x y^2 + x^3 - x$ $A = \{ x, y \geq 0, x + y \leq 4 \}$

La frontiera è composta da tre segmenti, su ciascuno dei quali va ristretta la funzione, procedendo poi come di consueto.

Minimo $-2/(3\sqrt{3})$ in $(1/\sqrt{3}, 0)$, massimo 60 in $(4, 0)$

b. $(x - y)^2 / 2 - (x + y)^3 / 3$ $A = \{ |y| \leq 1 - |x| \}$

Per disegnare l'insieme, osservare che è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi: basta quindi disegnarlo nel primo quadrante.

Minimo $-1/3$ in $(1/2, 1/2)$, massimo $5/6$ in $(-1, 0)$ e in $(0, -1)$

c. $x + 2y$ $A = \{ x^2 + y^2 \leq 5 \}$

I punti della frontiera (circonferenza) si possono scrivere usando le coordinate polari, nella forma $x = \sqrt{5} \cos t$, $y = \sqrt{5} \sin t$.

Si può procedere anche per via geometrica: le linee di livello della funzione sono le rette $x + 2y = c$; quelle che danno il massimo e il minimo sono tangenti al cerchio dato.

Massimo 5 in $(1, 2)$, minimo -5 in $(-1, -2)$.

d. $1 - x^2 - y^2$ $A = \{ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \}$

I punti della frontiera (circonferenza di centro $(1, 1)$) si possono scrivere usando le coordinate polari, nella forma $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$.

Si può procedere anche per via geometrica : le linee di livello della funzione sono circonferenze ; quelle che danno il massimo e il minimo intersecano il cerchio dato nei due punti che stanno sulla bisettrice.

$$\text{Max} = 2\sqrt{2} - 2 \text{ in } (1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2})$$

$$\text{min} = -2\sqrt{2} - 2 \text{ in } (1 + 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2})$$

$$\text{e. } x^2 + y^2 - x - y \quad A = \{ |x| \leq 1, |y| \leq 1 \}$$

$$\text{Max} = 4 \text{ in } (-1,1), \text{ min} = -1/4 \text{ in } (1,1/2) \text{ e } (1/2,1).$$

2. Utilizzando opportunamente il teorema di Fermat, calcolare massimo e minimo (se esistono) o estremo superiore ed inferiore delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato.

$$\text{a. } |\sin x + \cos x| ; x \in [0, \pi]$$

$$\text{b. } (4 + x) / (1 - x^2) ; x \in (-1, 1)$$

$$\text{c. } \frac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x} ; x \in (\pi/4, \pi]$$

$$\text{d. } \frac{x}{\log x} ; x \in (1, e^2]$$

$$\text{e. } \begin{cases} |4x - 1| & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 + \log_{1/2} x & \text{se } 1/2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\text{a. } \max = \sqrt{2} \text{ per } x = \pi/4 \quad \min = 0 \text{ per } x = 3\pi/4$$

$$\text{b. } \sup = +\infty \quad \min = \sqrt{15} / (8\sqrt{15} - 30) \text{ per } x = \sqrt{15} - 4$$

$$\text{c. } \max = 1 \text{ per } x = \pi \quad \inf = -\infty$$

- d. $\sup = +\infty$ $\min = e$ per $x = e$
 e. $\sup = 3$ $\min = 0$ per $x = 1/4$, $x = 4$

3. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato; in caso di risposta affermativa trovare i punti ξ che ne verificano la tesi, in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

- a. $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2}$; $x \in [-1, 7/9]$ b. $\sqrt[5]{|x+3|}$; $x \in [-6, 0]$
 c. $(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)$; $x \in [-\pi/4, 0]$ d. $\begin{matrix} x^2 + x & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 + ax & \text{se } 0 < x \leq 3/2 \end{matrix}$

- a. sì ; $\xi = -2/3$ b. no
 c. sì ; $\xi = -\operatorname{arctg} 1/2$ d. sì per $a = 1$, no per $a \neq 1$; $\xi = -1/2$

4. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato ; in caso di risposta affermativa trovare i punti ξ che ne verificano la tesi , in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

- a. $\sqrt{|x^2 - 1|}$; $x \in [-1, 2]$ b. $\operatorname{arcsen} \frac{2x}{x^2 + 1}$; $x \in [0, 1]$
 c. $\sqrt[3]{x-2}$; $x \in [1, 3]$ d. $\begin{matrix} x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log x & \text{se } 1 < x \leq e^2 \end{matrix}$

- a. no ; $\xi = -1/2$ b. sì ; $\xi = ((4 - \pi) / \pi)^{1/2}$
 c. no ; $\xi = 2 \pm (1 / \sqrt[3]{27})$ d. sì ; $\xi = e^2 / 3$

5. Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico delle seguenti funzioni

a. $\log \frac{(|x| - 1)^2}{x + 1}$

b. $|4x - 3x^2| e^{-2x}$

c. $\sin x + \cos 2x$

d. $\log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

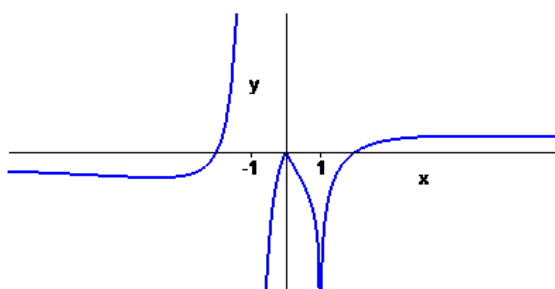
e. $\frac{1 - \sin x}{\sqrt{\cos x}}$

f. $\frac{(x-3)x^2}{x^2 - 4}$

R.:

a.

$$f'(x) = \frac{1 + (\operatorname{sgn} x)(x+2)}{(|x|-1)(x+1)}$$

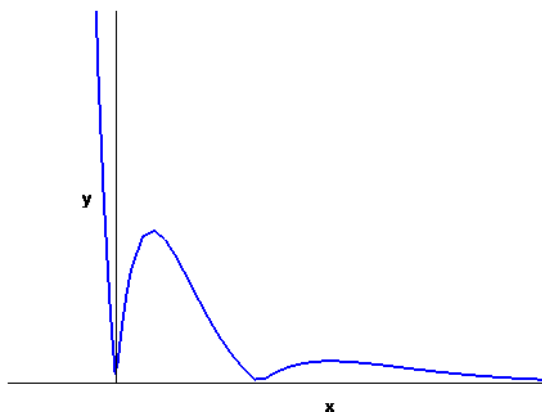


0 punto angoloso

b.

$$f'(x) = 2e^{-2x} \operatorname{sgn}(4x - 3x^2)(3x^2 - 7x + 2)$$

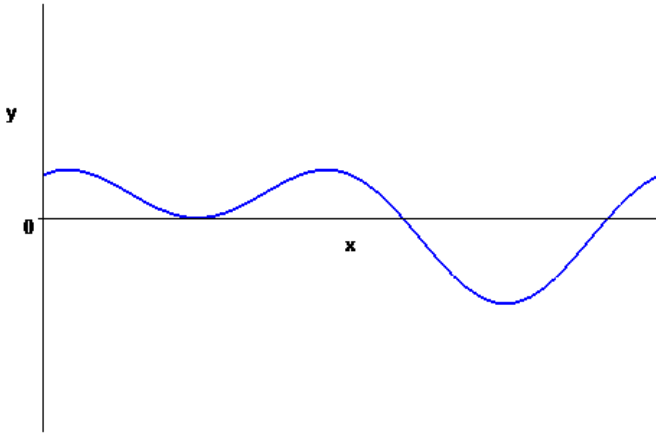
0, 4/3 punti angolosi



c.

$$f'(x) = \cos x (1 - 4 \sin x)$$

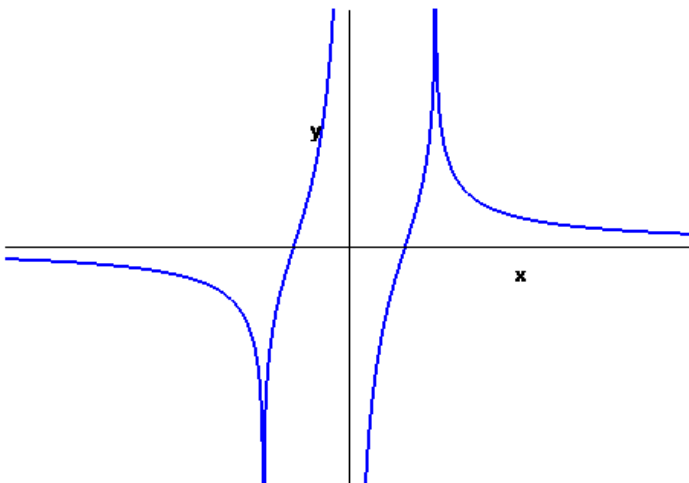
Il grafico sotto si riferisce all'intervallo $[0, 2\pi]$



d.

La funzione è dispari

$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

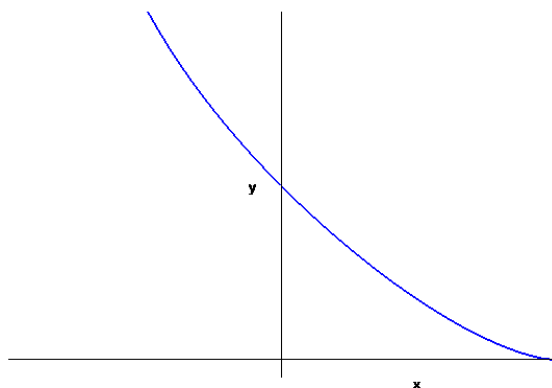


e.

Data la periodicità, si studia in $[-\pi, \pi]$; tenendo conto delle condizioni da imporre, si studia in $(-\pi/2, \pi/2)$

$$f'(x) = (\sin^2 x + \sin x - 2) / (\cos x)^{3/2}$$

$\pi/2$ disc. eliminabile; il prolungamento è derivabile, con derivata nulla.

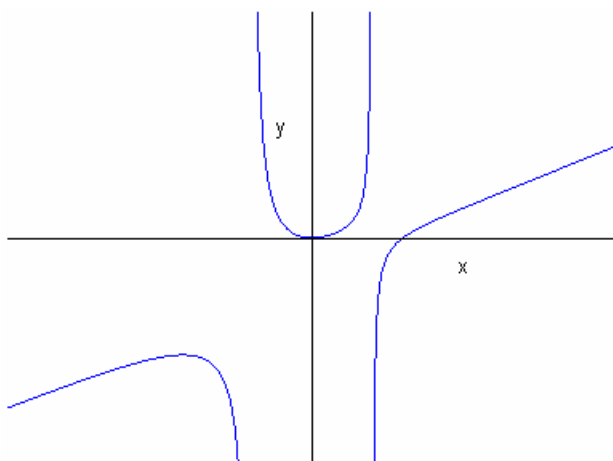


f.

$$f'(x) = x(x^3 - 12x + 24) / (x^2 - 4)^2$$

Per studiare il segno della derivata, occorre studiare graficamente quello del polinomio di terzo grado in parentesi.

$y = x - 3$ asintoto obliquo.



6. Calcolare i seguenti limiti con il teorema dell'Hôpital:

$$a. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} \quad (a > 1, a \neq 0)$$

$$b. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$$

$$c. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+1}{x-1} = 2$$

$$d. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0$$

$$e. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = -2$$

$$f. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\log \operatorname{sen} x} = 1$$

$$g. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}^{1/x} = \sqrt{e}$$

$$h. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{tg} x + \log \cos x}{x - \operatorname{sen} x \cos x} = +\infty$$

$$i. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \sqrt{x^2 - 4} - x = 2$$

$$l. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{\sqrt{(\pi^2/4) - x^2}}^{1/\log \cos x} = 0$$