

Sistemi lineari

Generalità sui sistemi

Sistema lineare di m equazioni in n incognite : definizione.

Coefficienti , termini noti.

Soluzioni.

Sistemi impossibili, determinati, indeterminati :

- $x + y = 1$, $2x + 2y = 0$ impossibile
- $x + y + z = 1$, $y + z = 1$, $z = 0$ determinato
- $x + y + z = 1$, $x + y = 0$ indeterminato
- $x + y - z = 1$ indetertermina

Rappresentazione matriciale di un sistema

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Matrice dei coefficienti : righe e colonne

Matrice completa

Colonna dei termini noti

Operazioni elementari che trasformano un sistema in uno equivalente (cioè con le stesse soluzioni) :

- scambiare tra di loro due equazioni
- moltiplicare un'equazione per una costante non nulla
- sommare ad una equazione altre equazioni del sistema ciascuna moltiplicata per una costante

esempio :

riduzione a forma canonica del sistema

$$2x + y - z = 4, x + 5y + 2z = 4, x - y = 0.$$

In forma matriciale:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Vogliamo procedere in modo che la matrice dei coefficienti diventi la matrice identica di ordine 3 , cioè la matrice

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Facciamo uno scambio di righe, in modo che il termine a_{11} sia 1 ; questo non è necessario, ma semplifica i calcoli:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

Moltiplichiamo la prima riga per -1 e sommiamola alla seconda; poi moltiplichiamo ancora la prima riga per -1 e sommiamola alla terza.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & -9 & -5 & -4 \end{array}$$

Il nuovo termine a_{22} deve diventare 1 : dividiamo la seconda riga per -6.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova seconda riga per -5 e sommiamola alla prima; poi moltiplichiamo la nuova seconda riga per 9 e sommiamola alla terza.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

Infine , il termine a_{33} deve diventare 1 : dividiamo la terza riga per -2.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova terza riga per -1/3 e sommiamola sia alla prima che alla seconda riga:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Il sistema a cui arriviamo è equivalente a quello dato; ma scritto in questo forma possiamo leggere le soluzioni direttamente nella colonna dei termini noti: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

Operazioni di cardine

Nell'esempio precedente le operazioni elementari sono state fatte in sequenze di 3 alla volta (perché 3 era il numero delle equazione, ovvero delle righe della matrice) : ciascuna di queste sequenze di operazioni riga ha avuto come risultato quello di far comparire nella tabella una colonna tutta nulla eccetto un termine uguale ad 1 che di volta in volta appare in una riga diversa . Se questo coefficiente è nella riga r e nella colonna s , diciamo che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s .

Altro esempio (stavolta la matrice dei coefficienti non è quadrata).

Procedendo come prima, si trova :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{diventa} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/7 \end{array}$$

Dato che nella matrice ci sono soltanto 3 righe , ci fermiamo qui : non è possibile ottenere una nuova colonna in cui il termine che vale 1 stia in una riga diversa da quelle già utilizzate.

In sintesi , in una operazione di cardine

(1) si sceglie un termine $a_{rs} \neq 0$ su cui fare cardine

cardine

$$\begin{array}{ccc|c} \dots & a_{1s} & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{rs} & \dots & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ms} & \dots & b_m \end{array}$$

questa colonna deve diventare nulla
eccetto il cardine che deve diventare 1



(2) si divide la riga r-esima per a_{rs}

(3) ad ogni altra riga si somma la riga r-esima moltiplicata per un'opportuna costante , in modo da far comparire di volta in volta 0 negli altri termini della colonna considerata.

In questo caso si dice che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s .

Riduzione a forma canonica (Jordan)

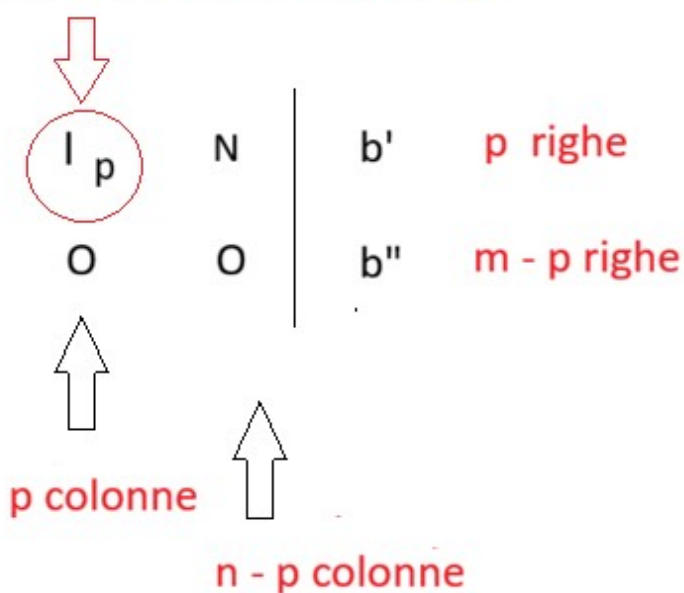
Il metodo usa le operazioni di cardine per trasformare il sistema in uno equivalente in cui sono state esplicitate quante più variabili possibili .

Il procedimento si interrompe quando:

- **non ci sono più variabili da esplicitare (sono state utilizzate tutte le colonne)**
- **non ci sono più equazioni da utilizzare (sono state utilizzate tutte le righe)**
- **pur essendoci ancora variabili da esplicitare ed equazioni da utilizzare , non ci sono più termini diversi da 0 da scegliere come cardini.**

Il numero massimo p di coefficienti su cui fare cardine si dice **caratteristica della matrice** .

matrice identica di ordine p



Il sistema così ottenuto si dice ridotto a forma canonica.

Il numero p di cardini utilizzati si dice **caratteristica** della matrice dei coefficienti.

Una volta scritto il sistema in questa forma, la sua risoluzione è immediata.

- $p = n = m$

tutte le variabili sono state esplicitate $p = n$

tutte le equazioni sono state esplicitate $p = m$

$$\begin{array}{c|c} I & b' \end{array}$$

Ad esempio

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$$x = -1, y = 3, z = 5$$

Il sistema ammette una sola soluzione, che si legge nella colonna dei termini noti.

- $p = n, \quad p < m$

tutte le variabili sono state esplicitate $p = n$

non tutte le equazioni sono state usate $p < m$

$$\begin{array}{c|c} \textcircled{I_n} & b' \\ \hline O & b'' \end{array}$$

O indica la matrice nulla con $m - n$ righe ed n colonne.

Ad esempio

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad m = 4, \quad n = 3, \quad p = 3$$

$$x = -1, y = 3, z = 0, \quad 0x + 0y + 0z = 0$$

La quarta equazione è superflua.

Il sistema ammette un'unica soluzione.

Altro esempio:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad m = 4, \quad n = 3, \quad p = 3$$

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 0, \quad 0x + 0y + 0z = 2$$

La quarta equazione è impossibile e tale anche il sistema.

- $p = m, \quad p < n$

non tutte le variabili sono state esplicitate $p < n$

tutte le equazioni sono state usate $p = m$

$$\begin{array}{c|c} \overset{v}{\underbrace{I}_m} & N \end{array} \quad \left| \quad b' \right.$$

N è una matrice di m righe ed $n - m$ colonne

Esempio

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$$x + 2w = -1, \quad y + w = 0, \quad z + 3w = 5$$

x, y, z variabili di base, w libera

$$x = -1 - 2t, \quad y = -t, \quad z = 5 - 3t, \quad w = t.$$

- $p < m$, $p < n$

non tutte le variabili sono state esplicitate $p < n$

non tutte le equazioni sono state usate $p < m$

$$\begin{array}{cc|c} \textcircled{I_p} & N & b' \\ 0 & 0 & b'' \end{array}$$

Nella parte inferiore compaiono $m - p$ righe di coefficienti nulli. Nelle prime p colonne questi coefficienti sono nulli perché si riferiscono a variabili esplicitate nelle altre equazioni; nelle rimanenti $n - p$ colonne i coefficienti sono nulli perché altrimenti potremmo scegliere tra di esse altri cardini, contrariamente alle ipotesi.

Analogamente a quanto visto prima :

il sistema ammette soluzioni se e solo se $b'' = 0$; in tal caso le soluzioni sono ∞^{n-p} ; ricaviamo le p variabili di base in funzione delle $n - p$ variabili libere.

Riassumendo :

$p = m$ esistono soluzioni

$p < m$ l'esistenza di soluzioni non è assicurata

$p = n$ se c'è soluzione è unica

$p < n$ se c'è soluzione, non è unica

$p = m = n$ c'è una ed una sola soluzione.

$$\begin{array}{cc|c} \textcircled{I_p} & N & b' \\ 0 & 0 & b'' \end{array}$$

Teorema di Roché-Capelli

Il sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la matrice dei coefficienti e quella completa hanno la stessa caratteristica ;
 $\text{car } A = \text{car } M_c$.

Le soluzioni sono ∞^{n-p} , essendo p la caratteristica comune alle due matrici. Se $p = n$, si ha unicità.

Nel passaggio dalla matrice dei coefficienti a quella completa si aggiunge una colonna. L'unica possibilità di trovare un nuovo termine su cui fare cardine dipende da b'' : se contiene solo termini nulli , non ci sono altri cardini e la caratteristica rimane invarita; se invece contiene almeno un termine non nullo , lo scegliamo come cardine e la caratteristica aumenta di 1. A questo punto il procedimento necessariamente ha termine.

Dunque $\text{car } A = \text{car } M_c \Leftrightarrow b'' = 0$.

Ma sappiamo che il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow b'' = 0$. Questo completa la dimostrazione.

Il fatto che le soluzioni siano ∞^{n-p} l'abbiamo già visto.

Il teorema fornisce le condizioni di risolubilità del sistema; per il momento, però, il risultato non è di grande utilità perchè i calcoli che permettono di stabilire la caratteristica di una matrice sono gli stessi

che permettono di risolvere il sistema; in altre parole, la condizione di risolubilità non è ottenuta a priori, cioè senza risolvere il sistema.

Per questo occorre dare un metodo diverso per calcolare la caratteristica.

Vediamo come questo si possa ottenere a partire dalla definizione di determinante.

Determinante di una matrice quadrata, cioè con lo stesso numero di righe e di colonne

La definizione avviene per induzione:

- si definisce il determinante nel caso $n = 1$
- il determinante di una matrice di ordine $n+1$ si calcola a partire da quello delle matrici di ordine n .

A questo proposito diamo la seguente definizione

Data una **matrice quadrata** A di ordine n , sia a_{rs} un suo termine ; chiamiamo **matrice aggiunta** A_{rs} quella ottenuta da A togliendo la riga r e la colonna s ; in tal modo si ottiene una matrice quadrata di ordine $n-1$ ovvero un minore di ordine $n-1$.

Definizione di determinante secondo la regola di Laplace:

- se $n = 1$, $\det A = a_{11}$
- conoscendo il determinante per matrici di ordine n , definiamolo per una matrice A di ordine $n+1$.

Prendiamo i termini della prima riga

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}$$

Consideriamo le matrici aggiunte

$$A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13} \quad \dots \quad A_{1n}$$

Queste sono minori di ordine n e quindi possiamo calcolarne il determinante per l'ipotesi che abbiamo fatto:

$$\det A_{11} \quad \det A_{12} \quad \det A_{13} \quad \dots \quad \det A_{1n}.$$

Moltiplichiamo coefficienti e determinanti, cambiando il segno al secondo (coeff. 12), al quarto (coeff. 14) e così via (**cioè a quelli in cui la somma degli indici è DISPARI**) e poi sommiamo.

$(-1)^{1+r}$ vale :

1 se $1 + r$ è pari, cioè se r è dispari

-1 se $1 + r$ è dispari, cioè se r è pari.

Allora possiamo tenere presente la regola dei segni alternati nei vari prodotti moltiplicandoli per l'opportuna potenza di -1 :

$$\begin{aligned} & (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + \\ & + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \end{aligned}$$

Questo tipo di calcolo si dice sviluppo di un determinante rispetto alla prima riga.

Proprietà importante:

il determinante può essere calcolato a partire da **una qualunque riga o colonna** secondo le regole viste ; **il risultato è sempre lo stesso**. Ricordarsi che il prodotto di un coefficiente per il

determinante della matrice aggiunta va lasciato con il suo segno o va cambiato a seconda che la somma degli indici del coefficiente sia pari o dispari.

Esempio $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla prima riga :

$$a_{11} = a \quad \det A_{11} = d \quad \text{somma indici pari} \quad ad$$

$$a_{12} = b \quad \det A_{12} = c \quad \text{somma indici dispari} \quad -bc$$

$$\det A = ad - bc$$

Sviluppiamo rispetto alla seconda riga :

$$a_{21} = c \quad \det A_{21} = b \quad \text{somma indici dispari} \quad -bc$$

$$a_{22} = d \quad \det A_{22} = a \quad \text{somma indici pari} \quad ad$$

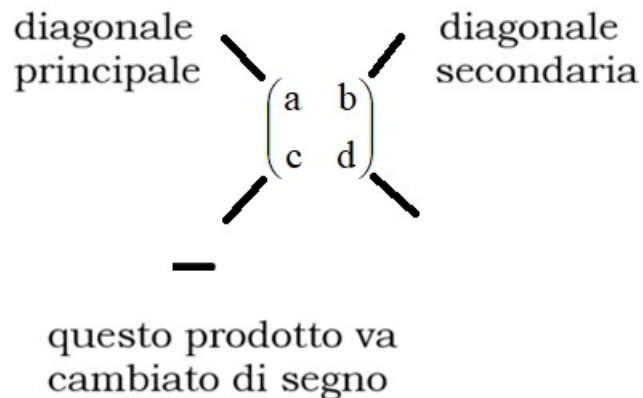
$$\det A = ad - bc$$

Sviluppiamo rispetto alla prima colonna :

$$a_{11} = a \quad \det A_{11} = d \quad \text{somma indici pari} \quad ad$$

$$a_{21} = c \quad \det A_{21} = b \quad \text{somma indici dispari} \quad -bc$$

$$\det A = ad - bc$$



Esempio $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prima riga : $1 (0 - 3) - 2 (0 + 6) - 1 (0 + 2) = -17$

seconda riga : $0 (0 + 1) + 1 (0 - 2) - 3 (1 + 4) = -17$

Regola di Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

3 diagonali che scendono (principali) , 3 che salgono (secondarie)

diagonali principali (che scendono)

$$1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 = -12$$

diagonali secondarie (che salgono)

$$(-2) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 = 5 \quad \underline{\text{va cambiato di segno}}$$

$$\det A = -12 - 5 = -17$$

Riassumendo

- si sceglie una riga o una colonna
- si prendono i coefficienti di questa riga o colonna
- moltiplichiamo ciascuno di questi coefficienti per il determinante della sua matrice aggiunta
- si lascia il segno del prodotto invariato se la somma degli indici del coefficiente è pari, altrimenti si cambia di segno
- si sommano i singoli prodotti così ottenuti.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Conviene scegliere la seconda colonna o la terza riga data la presenza di due coefficienti nulli (che non danno contributo nel calcolo del determinante, qualunque sia il determinante delle loro matrici aggiunte).

Scegliamo la seconda colonna:

$$-2 \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Questi due possono essere calcolati con la regola di Sarrus o sviluppandoli anch'essi rispetto alla seconda colonna (o riga) dove c'è uno 0:

$$\begin{aligned} & -2 \left\{ -\det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} + \\ & + 2 \left\{ 3 \det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} \\ & = 48. \end{aligned}$$

Proprietà dei determinanti

- il determinante della matrice identica di qualunque ordine vale 1
- poiché il calcolo del determinante non fa distinzione tra righe e colonne , una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante (la matrice trasposta è quella in cui le righe si scambiano con le colonne) .

Per quanto detto sopra tutte le proprietà che valgono per le righe valgono anche per le colonne ; d'ora in poi – per evitare di ripetere due volte la stessa proprietà – parleremo di **linee** per indicare indifferentemente una riga o una colonna.

- se si scambiano tra loro due linee , il determinante cambia di segno
- se si moltiplica una linea per una costante , il determinante viene moltiplicato per questa costante
- se ad una linea si aggiunge una combinazione delle altre, il determinante rimane invariato.
- il determinante di una matrice in cui una linea è nulla vale 0
- il determinante di una matrice con due linee uguali è 0.
- linearità : se ad una linea A^r si aggiunge un'altra linea C eventualmente moltiplicata per una costante t , allora:

$$\det (\dots A^r + t C \dots) = \det (\dots A^r \dots) + t \det (\dots C \dots)$$

Se C è una linea già presente nella matrice , allora si ha $\det (\dots C \dots) = 0$ perché determinante di una matrice con due linee uguali.

Possiamo usare le operazioni elementari per far comparire degli 0 nella matrice, il che facilita il calcolo del determinante.

Osserviamo che queste operazioni (**ma fatte solo sulle righe**) erano quelle utilizzate per ridurre una matrice a forma canonica. Consideriamo una matrice quadrata : a seconda delle operazioni che effettuiamo il determinante cambia o rimane invariato (cambia se dividiamo la riga per il cardine); però la matrice di partenza e quella modificata o hanno entrambe determinante nullo o entrambe determinante non nullo (non necessariamente con lo stesso valore).

Esempio : Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante rispetto alla seconda colonna:

$$-2 \det \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + C_1 \quad -2 \det \begin{pmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla seconda riga

$$6 \det \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 48.$$

Esercizi

Delle seguenti matrici calcolare il determinante :

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppare il determinante rispetto alla prima riga ; ripetere il calcolo rispetto alla seconda colonna ; infine applicare la regola di Sarrus. (R.: - 6)

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(R.: -27)

Teorema di Kronecker ovvero calcolo della caratteristica per mezzo di determinanti

Data una matrice A di m righe ed n colonne :

$\text{car}A = p \leftrightarrow$

- esiste un minore B di ordine p con determinante diverso da 0
- tutti i minori di ordine $p+1$ che contengono B (se esistono) hanno determinante nullo.

→ Infatti, se $\text{car}A = p$, la forma canonica della matrice è

$$\begin{pmatrix} I_p & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice identica (che ha determinante diverso da 0) deve provenire da un minore B con determinante anch'esso non nullo.

Ogni minore C di ordine $p+1$ che contiene B (se esiste) diventa un minore di ordine $p+1$ che contiene la matrice identica ed una riga nulla, dunque con determinante 0; lo stesso deve valere anche per C .

← Si ragiona come prima, ma all'inverso.

Dobbiamo provare che la forma canonica della matrice è

$$\begin{pmatrix} I_p & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il minore B si trasforma in un minore con determinante diverso da 0, quindi senza righe nulle : l'unica possibilità è che diventi la matrice identica I_p .

I minori di ordine $p+1$ che contengono B assumono la forma

$$\begin{pmatrix} I_p & c \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Qui 0 indica una riga con p termini , tutti nulli. Il determinante deve essere nullo ; perché questo accada, deve essere $x = 0$. ###

Osservazione :

Per stabilire se anche la matrice completa ha caratteristica p , prendiamo i minori di ordine $p+1$ che contengono il minore B, utilizzando la colonna dei termini noti. Questi minori devono avere tutti determinante nullo.

Se ciò accade, nel sistema possiamo trattenere solo le equazioni corrispondenti alle righe di B e risolvere avendo come variabili di base quelle corrispondenti alle colonne di B, le altre essendo dunque variabili libere.

Esempi di calcolo della caratteristica

Esempio1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

- metodo “ottimista”

si parte dal minore di ordine massimo, che in questo caso è la matrice stessa

$$1 (7 - 5) - 2 (7 - 3) + 3 (5 - 3) = 0$$

$$\text{carA} < 3$$

Poiché il minore A_{33} ha determinante $\neq 0$, $\text{carA} = 2$

- metodo “pessimista”

si parte da un minore di ordine 2 con determinante $\neq 0$, ad esempio A_{33} ; $\text{carA} \geq 2$ Si completa a minore di ordine 3 nell’unico modo possibile , cioè prendendo A. Poichè il determinante è nullo, la caratteristica è 2.

In questo caso i due metodi sono equivalenti.

Esempio2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Possiamo partire da un minore B di ordine 3 , ad es. quello formato dalle tre righe e dalle prime tre colonne.

Poichè $\det B \neq 0$, $\text{car}A = 3$.

Oppure si prende un minore di ordine 2 con $\det.$ non nullo , ad es. quello formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne. Quindi $\text{car}A \geq 2$; si può orlare a minore di ordine 3 in due modi. Poiché quello formato con le prime tre colonne ha $\det. \neq 0$, si sdeduce che $\text{car}A = 3$.

Calcolo di caratteristica e studio sistemi

I risultati sono quelli già visti : cambia soltanto il modo di calcolare le caratteristiche.

Riportiamo i risultati.

- il sistema ha soluzioni se e solo se $\text{car}A = \text{car}M_c (= p)$
- indicata con B il minore di ordine p con determinante non nullo selezionato, possiamo cancellare le $m - p$ equazioni corrispondenti alle righe che non danno B .
- risolviamo il sistema nelle p variabili di base corrispondenti alle colonne che danno B , in funzione delle altre $n - p$ variabili.

Osservazione sulla caratteristica di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata di ordine n , la sua caratteristica è massima (cioè vale n) se e solo se $\det A \neq 0$.

Infatti $\text{car}A = n$ se e solo se nel passaggio alla forma canonica di Jordan A si trasforma in I_n . Ma nel passaggio alla forma canonica di una matrice quadrata , il determinante se era 0 rimane 0, se era $\neq 0$ rimane $\neq 0$. Poiché $\det I_n = 1$, deve essere $\det A \neq 0$.

Esercizi proposti

1. Determinare la caratteristica delle seguenti matrici (eventualmente in funzione del parametro k) :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \\ (a) \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 6 & 16 & 0 \end{array} \\ (b) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ k & k-1 & 0 \\ k & 2k-2 & 2k-2 \end{array} \\ (c) \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & k-1 & k-2 \\ 2k & 2 & 1-k & -2 \end{array} \\ (d) \end{array} \end{array}$$

Soluzioni

$$\begin{array}{cc} (a) & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} (b) & 2 \end{array}$$

(c) 3 per $k \neq 0$ e $k \neq 1$, 2 per $k = 0$, 1 per $k = 1$

(d) 3 per $k \neq \pm 1$, 2 per $k = 1$, 3 per $k = -1$

2. Discutere (cioè stabilire se hanno o no soluzioni e , se ne hanno, quante sono) e risolvere i seguenti sistemi, utilizzando il teorema di Kronecker :

(a) $2x + y + 2z = 4$, $3x + 6y - 4z = -2$

(b) $x - 3y = 11$, $2x - 7y = 25$, $x - 4y = 14$

(c) $kx + y + z = 0$, $x + ky + z = 0$, $x + y + kz = 0$

(d) $x - ky + kz = 1$, $x - y + z = 3$

Soluzioni

(a) $x = (26 - 16t) / 9$, $y = (-16 + 14t) / 9$, $z = t$

(b) $x = 2, y = -3$

(c) per $k \neq 1$, $k \neq -2$ $x = y = z = 0$; per $k = 1$ $x = s$, $y = t$,
 $z = -s - t$; per $k = -2$ $x = y = z = t$

(d) per $k \neq 1$ $x = (1 - 3k)/(1 - k)$, $y = (4 - 6k)/(1 - k) - t$, $z = t$; per $k = 1$ nessuna soluzione.

Operazioni tra matrici

La **somma** di due matrici A , B con le stesse dimensioni è la matrice che ha per termine rs la somma di a_{rs} con b_{rs} .

Il **prodotto di una matrice A per un numero k** è la matrice ottenuta da A moltiplicando per k tutti i termini.

Qualche proprietà:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A$$

$A + O = A$ (dove O è la matrice con le stesse dimensioni di A con i termini tutti nulli.

$A + (-A) = O$ (dove $-A$ è la matrice i cui coefficienti sono gli opposti degli analoghi coefficienti di A)

$$k(hA) = (kh)A$$

$$1A = A$$

$$(h + k)A = hA + kA.$$

Date due matrici A , B , il loro **prodotto** AB si definisce righe per colonne: il termine c_{rs} è il prodotto della riga r di A per la colonna s di B nel senso :

$$a_{r1} b_{1s} + a_{r2} b_{2s} + \dots + a_{rs} b_{rs} + \dots$$

(questa operazione si dice anche prodotto scalare tra vettori) .
Perché questa operazione abbia senso, il numero dei termini nella riga di A (cioè il numero di colonne di A) sia uguale al numero di termini nella colonna di B (cioè il numero di righe di B) :

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

$$A_{4 \times 2} B_{2 \times 3} = C_{4 \times 3} , \quad B_{2 \times 3} A_{4 \times 2} \text{ non ha senso}$$

Anche quando hanno senso entrambi i prodotti $A B$, $B A$, in generale sono diversi.

Qualche proprietà :

$$A (B C) = (A B) C ; \text{ ha quindi senso scrivere } ABC$$

$$(A + B) C = A C + B C$$

$A I = A$, $I A = A$ con I matrice identica di ordine opportuno , in modo da dare significato ai due prodotti.

Se A e B sono due matrici quadrate dello stesso ordine n, allora $\det AB = \det A \det B$.

Attenzione : in generale $\det (A + B) \neq \det A + \det B$ (*) .

Questo non esclude che in qualche caso possa valere l'uguaglianza . Ad esempio : data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

trovare B in modo che valga l'uguaglianza.

R.: ci sono infinite possibili scelte per B ; una tra le possibili è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se invece scegliamo B uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la (*) non vale. #

Osservazione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad BA \text{ non ha senso}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo esempio mostra che :

- il prodotto tra matrici non è commutativo, intanto perché può avere senso AB ma non BA; anche nel caso in cui

abbiano senso entrambi i prodotti , non è detto siano uguali.

- non vale la legge di annullamento del prodotto

In campo numerico $x y = 0 \leftrightarrow$ uno almeno tra x ed y è nullo.

Nell'esempio precedente , $BA = O$ senza che né A né B siano nulle.

Esercizio

Date le matrici A e B , rispettivamente :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare AB e BA ; osservare che in questo caso i due prodotti (entrambi hanno senso) differiscono anche come dimensioni.

Si chiama matrice **trasposta** di A la matrice A^t ottenuta da A scambiando righe con colonne.

Qualche proprietà:

$$(A B)^t = B^t A^t$$

$\det A^t = \det A$ nel caso di una matrice quadrata

$\text{car } A^t = \text{car } A$ per ogni matrice.

Nuova rappresentazione matriciale di un sistema

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

A matrice dei coefficienti m righe, n colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = b$$

dove AX indica il prodotto della matrice A di dimensioni m,n per la matrice X di dimensioni $n,1$; il risultato è una matrice $m,1$.

Matrice inversa

Una matrice quadrata A di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice quadrata X di ordine n t.c $AX = XA = I_n$.

Una matrice con questa proprietà può non esistere:

Ad esempio: se A è la matrice nulla O di ordine n , per ogni matrice quadrata X di ordine n risulta $OX = O$, dunque non potrà mai essere uguale ad I_n .

Altro esempio: se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, supponiamo esista $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che risulti $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ma $AX = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che non può mai essere la matrice identica.

- Una matrice con le proprietà richieste, se esiste, è unica.

Infatti:

siano X, Y due matrici quadrate tali che $AX = XA = I$, $AY = YA = I$.

Partiamo da $AX = I$ e moltiplichiamo a sinistra ambo i membri per Y : $YAX = YI$; ma $YA = I$ e $IX = X$, $YI = Y$. Dunque $X = Y$.

- Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$; quando ciò accade la matrice X (che come abbiamo visto è unica) si dice matrice inversa (si indica A^{-1}).

Infatti se deve essere $AX = I_n$, allora $\det AX = 1$, ma $\det AX = \det A \det X$. Quindi $\det A \neq 0$.

Si può dimostrare che la condizione è anche sufficiente per l'invertibilità.

Infatti , trovare una matrice X tale che $AX = I$ equivale a risolvere n sistemi lineari :

$$AX^1 = I^1 \quad \dots \quad AX^n = I^n$$

in ciascuno dei quali :

- la matrice dei coefficienti è sempre A
- la colonna dei termini noti è una colonna della matrice identica
- la colonna delle incognite è una colonna della matrice X

La condizione $\text{car}A = n$ è necessaria e sufficiente perché ciascuno di questi sistemi abbia una ed una sola soluzione; ma $\text{car}A = n \leftrightarrow \det A \neq 0$.

Allo stesso modo, trovare una matrice Y tale che $YA = I$ equivale a scrivere $(Y A)^t = I^t$, cioè $A^t Y^t = I$. In questo modo ci riconduciamo alla situazione precedente (con A^t invece di A) .

Come sopra , dunque , perché il problema abbia una ed una sola soluzione, deve essere $\text{car}A^t = n \leftrightarrow \det A^t \neq 0 \leftrightarrow \det A \neq 0$.

Quindi esistono X , Y tali che $AX = YA = I$ se e solo se $\det A \neq 0$.

Facciamo vedere che $X = Y$:

$$AX = I \leftrightarrow YAX = YI \leftrightarrow IX = Y \leftrightarrow X = Y.$$

Come si calcola la matrice inversa

Studiamo il problema $A X = I$ (sono n sistemi con la stessa matrice A dei coefficienti e per termini noti le colonne della matrice identica) ; lavorando sulla matrice quadrata A con il metodo di Jordan, se $\det A \neq 0$, si possono fare n operazioni di cardine, dopo le quali in luogo della matrice I si leggeranno le soluzioni dei sistemi , cioè l'inversa A^{-1} .

In altre parole, dopo n operazioni di cardine la matrice

$A I_n$ diventa $I_n A^{-1}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice iniziale : Scriviamo A e alla sua destra I_3 .

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iniziamo le operazioni di cardine. Conviene fare uno scambio di righe tra la prima e la terza: in questo modo il termine di posto 11 sia 1 e non 4. Questo rende più semplice i calcoli successivi, ma naturalmente non è un'operazione necessaria.

1	1	1	0	0	1
4	2	1	1	0	0
2	1	1	0	1	0

Cardine sul termine 11:

1	1	1	0	0	1
0	_2	_3	1	0	_4
0	_1	_1	0	1	_2

Scambio tra riga2 e riga 3 , sempre per semplificare i calcoli (il cardine vale -1 invece che -2) :

1	1	1	0	0	1
0	_1	_1	0	1	_2
0	_2	_3	1	0	_4

Cardine sul termine di posto 22 :

1	0	0	0	1	_1
0	1	1	0	_1	2
0	0	_1	1	_2	0

Cardine sul termine di posto 33 :

1	0	0	0	1	_1
0	1	0	1	_3	2
0	0	1	_1	2	0

Terminate le operazioni di cardine, a sinistra abbiamo ottenuto la matrice identica, a destra la matrice inversa di A , che è dunque :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Un metodo alternativo per calcolare l'inversa

$$A^{-1} = \left(\frac{(-1)^{r+s} \det A_{rs}}{\det A} \right)^t$$

- per ogni coefficiente a_{rs} si calcola il determinante della matrice aggiunta A_{rs} (che è la matrice ottenuta da A togliendo la riga r e la colonna s)
- i determinanti si cambiano di segno se la somma degli indici è dispari, altrimenti si lasciano invariati
- la matrice così ottenuta si traspone (si scambiano le righe con le colonne).
- si divide per $\det A$ (cioè si dividono tutti i termini per questo numero).

esempio

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\det A = ad - bc$ che deve essere $\neq 0$

$$\det A_{11} = d \quad \det A_{12} = c \quad \det A_{21} = b \quad \det A_{22} = a$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Provare che se A è la matrice (matrice diagonale) , la sua inversa è quella indicata:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

se a, b, c sono diversi da 0.

Osservazione

La matrice identica I è invertibile e l'inversa coincide con la matrice stessa.

Osservazione

$$\det A^{-1} = 1 / \det A.$$

Infatti $A A^{-1} = I \rightarrow \det (A A^{-1}) = \det I \rightarrow \det A \det A^{-1} = 1$, da cui l'asserto.

Esercizi proposti : calcolare (se esiste) l'inversa per le due matrici seguenti , utilizzando entrambi i metodi di calcolo indicati.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{23} & 7 & -3 & -6 \\ -2 & -9 & 5 \\ -10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B non è invertibile

Sistemi quadrati con la matrice dei coefficienti che è invertibile : regola della matrice inversa

$AX = b$ con $\det A \neq 0$ (cioè A invertibile).

Il sistema ammette una ed una sola soluzione ; moltiplicando a sinistra per A^{-1} , si trova $A^{-1}AX = A^{-1}b$ e dunque $X = A^{-1} b$.

Il calcolo della soluzione è dunque ricondotto a quello della matrice inversa di A (e successivo prodotto per b) .

Sistemi quadrati con la matrice dei coefficienti che è invertibile : regola della matrice inversa

Esiste un metodo per trovare la soluzione che fa uso dei determinanti (regola di Cramer) :

il valore dell'incognita x_k è dato da

$$x_k = \frac{\det (A^1 \dots b \dots A^n)}{\det A}$$

con b nella colonna k -esima.

In altre parole, per trovare il valore dell'incognita x_k , nella matrice dei coefficienti si sostituisce la colonna k -esima con la colonna dei termini noti, si calcola il determinante di questa matrice e si divide pòer $\det A$.

Per semplificare la notazione, consideriamo un sistema di 2 equazioni in due incognite (ma le considerazioni che faremo si estendono senza difficoltà al caso generale).

Il sistema

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \quad , \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

si può riscrivere nella forma

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 = b$$

dove A^1 , A^2 sono le colonne della matrice e b la colonna dei termini noti.

$$\det (b \ A^2) = \det (x_1 A^1 + x_2 A^2 \ A^2) =$$

per la linearità del determinante questo equivale a :

$$x_1 \det (A^1 \ A^2) + x_2 \det (A^2 \ A^2) = x_1 \det A$$

Infatti il secondo determinante è nullo perché ci sono due colonne uguali.

In definitiva, $\det (b \ A^2) = x_1 \det A$, da cui si ricava x_1 ottenendo il risultato stabilito dal teorema. ###

Esempio :

Risolvere il sistema

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y = 1 \quad , \quad x - z = 2$$

con il metodo

- di Jordan (operazioni di cardine)
- di Cramer
- della matrice inversa .

$$\text{R.: } x = 4/3 \quad , \quad y = 1/3 \quad , \quad z = - 2 / 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizi riassuntivi sui sistemi

1. Risolvere i seguenti sistemi :

$$(a) \quad 2x + y + 2z = 4 \quad , \quad 3x + 6y - 4z = -2$$

$$(b) \quad x - 3y = 11 \quad , \quad 2x - 7y = 25 \quad , \quad x - 4y = 14$$

$$(a) \ x = (26 - 16t) / 9, \ y = (-16 + 14t) / 9, \ z = t$$

$$(b) \ x = 2, \ y = -3$$

2. Utilizzare sia la regola di Cramer che il metodo dell'inversa per risolvere i seguenti sistemi:

$$(a) \ 3x + 7y = 27, \ 5x - 2y = 4$$

$$(b) \ x - 3y + z = 10, \ 3x + y - 2z = -9$$

$$(c) \ kx - 2y = 1, \ x + ky = k$$

3. Discutere l'esistenza di soluzioni per il sistema:

$$x + 2y - 5z = 0, \ x + y + z = 1, \ 2x + y - 4z = 3$$

R.: Il sistema è impossibile.

4. Studiare il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

R.: $x = -t, y = -t, z = t, w = 0$

5. Discutere il seguente sistema al variare del parametro k :

$$x + y + k z = 2 \quad , \quad k y + 6 z = 3 \quad , \quad x + z = 1$$

R.: Per $k \neq -2$, $k \neq 3$ una sola soluzione

per $k = -2$ nessuna soluzione

per $k = 3$ ∞^1 soluzioni