

Lezione n.1

Sistemi lineari

Generalità sui sistemi

Sistema lineare di m equazioni in n incognite : definizione.

Coefficienti , termini noti.

Soluzioni.

Sistemi impossibili, determinati, indeterminati :

- $x + y = 1$, $2x + 2y = 0$ impossibile
- $x + y + z = 1$, $y + z = 1$, $z = 0$ determinato
- $x + y + z = 1$, $x + y = 0$ indeterminato
- $x + y - z = 1$ indeterminato

Rappresentazione matriciale di un sistema

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Matrice dei coefficienti : righe e colonne

Matrice completa

Colonna dei termini noti

Operazioni elementari che trasformano un sistema in uno equivalente (cioè con le stesse soluzioni) :

- scambiare tra di loro due equazioni
- moltiplicare un'equazione per una costante non nulla
- sommare ad una equazione altre equazioni del sistema ciascuna moltiplicata per una costante

esempio :

riduzione a forma canonica del sistema

$$2x + y - z = 4, x + 5y + 2z = 4, x - y = 0.$$

In forma matriciale:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Vogliamo procedere in modo che la matrice dei coefficienti diventi la matrice identica di ordine 3 , cioè la matrice

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Facciamo uno scambio di righe, in modo che il termine a_{11} sia 1 ; questo non è necessario, ma semplifica i calcoli:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

Moltiplichiamo la prima riga per -1 e sommiamola alla seconda; poi moltiplichiamo ancora la prima riga per -1 e sommiamola alla terza.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & -9 & -5 & -4 \end{array}$$

Il nuovo termine a_{22} deve diventare 1 : dividiamo la seconda riga per -6.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova seconda riga per -5 e sommiamola alla prima; poi moltiplichiamo la nuova seconda riga per 9 e sommiamola alla terza.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

Infine , il termine a_{33} deve diventare 1 : dividiamo la terza riga per -2.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova terza riga per -1/3 e sommiamola sia alla prima che alla seconda riga:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Il sistema a cui arriviamo è equivalente a quello dato; ma scritto in questa forma possiamo leggere le soluzioni direttamente nella colonna dei termini noti: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

Operazioni di cardine

Nell'esempio precedente le operazioni elementari sono state fatte in sequenze di 3 alla volta (perché 3 era il numero delle equazione, ovvero delle righe della matrice) : ciascuna di queste sequenze di operazioni riga ha avuto come risultato quello di far comparire nella tabella una colonna tutta nulla eccetto un termine uguale ad 1 che di volta in volta appare in una riga diversa . Se questo coefficiente è nella riga r e nella colonna s , diciamo che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s .

Altro esempio (stavolta la matrice dei coefficienti non è quadrata).

Procedendo come prima, si trova :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{diventa} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/7 \end{array}$$

Dato che nella matrice ci sono soltanto 3 righe , ci fermiamo qui : non è possibile ottenere una nuova colonna in cui il termine che vale 1 stia in una riga diversa da quelle già utilizzate.

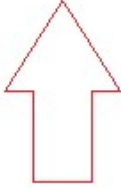
In sintesi , in una operazione di cardine

(1) si sceglie un termine $a_{rs} \neq 0$ su cui fare cardine

cardine

$$\begin{array}{ccc|c} \dots & a_{1s} & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{rs} & \dots & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ms} & \dots & b_m \end{array}$$

questa colonna deve diventare nulla
eccetto il cardine che deve diventare 1



(2) si divide la riga r-esima per a_{rs}

(3) ad ogni altra riga si somma la riga r-esima moltiplicata per un'opportuna costante , in modo da far comparire di volta in volta 0 negli altri termini della colonna considerata.

In questo caso si dice che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s .

Lezione n.2

Riduzione a forma canonica (Jordan)

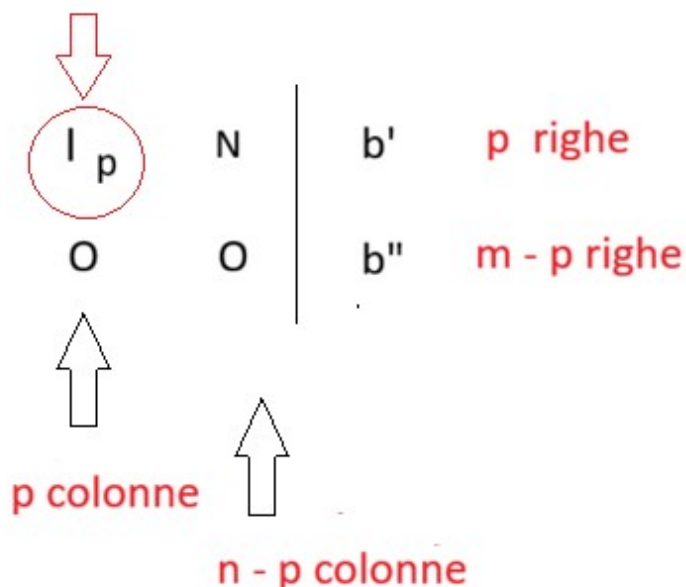
Il metodo usa le operazioni di cardine per trasformare il sistema in uno equivalente in cui sono state esplicitate quante più variabili possibili .

Il procedimento si interrompe quando:

- **non ci sono più variabili da esplicitare (sono state utilizzate tutte le colonne)**
- **non ci sono più equazioni da utilizzare (sono state utilizzate tutte le righe)**
- **pur essendoci ancora variabili da esplicitare ed equazioni da utilizzare , non ci sono più termini diversi da 0 da scegliere come cardini.**

Il numero massimo p di coefficienti su cui fare cardine si dice **caratteristica della matrice** .

matrice identica di ordine p



Il sistema così ottenuto si dice ridotto a forma canonica.

Il numero p di cardini utilizzati si dice **caratteristica** della matrice dei coefficienti.

Una volta scritto il sistema in questa forma, la sua risoluzione è immediata.

- $p = n = m$

tutte le variabili sono state esplicitate $p = n$

tutte le equazioni sono state esplicitate $p = m$

$$\left(\begin{array}{c|c} I & b' \end{array} \right)$$

Ad esempio

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$x = -1, y = 3, z = 5$$

Il sistema ammette una sola soluzione, che si legge nella colonna dei termini noti.

- $p = n, \quad p < m$

tutte le variabili sono state esplicitate $p = n$

non tutte le equazioni sono state usate $p < m$

$$\begin{array}{c|c} \textcircled{I_n} & b' \\ \hline 0 & b'' \end{array}$$

O indica la matrice nulla con $m - n$ righe ed n colonne.

Ad esempio

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad m = 4, \quad n = 3, \quad p = 3$$

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 0, \quad 0x + 0y + 0z = 0$$

La quarta equazione è superflua.

Il sistema ammette un'unica soluzione.

Altro esempio:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad m = 4, \quad n = 3, \quad p = 3$$

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 0, \quad 0x + 0y + 0z = 2$$

La quarta equazione è impossibile e tale anche il sistema.

- $p = m$, $p < n$

non tutte le variabili sono state esplicitate $p < n$

tutte le equazioni sono state usate $p = m$

$$\begin{array}{c|c} \overset{v}{\textcircled{I_m}} & N \end{array} \quad \left| \quad b' \right.$$

N è una matrice di m righe ed $n - m$ colonne

Esempio

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$$x + 2w = -1 \quad , \quad y + w = 0 \quad , \quad z + 3w = 5$$

x, y, z variabili di base , w libera

$$x = -1 - 2t \quad , \quad y = -t \quad , \quad z = 5 - 3t \quad , \quad w = t.$$

- $p < m$, $p < n$

non tutte le variabili sono state esplicitate $p < n$

non tutte le equazioni sono state usate $p < m$

$$\begin{array}{cc|c} \overset{v}{\textcircled{I_p}} & N & b' \\ O & O & b'' \end{array}$$

Nella parte inferiore compaiono $m - p$ righe di coefficienti nulli. Nelle prime p colonne questi coefficienti sono nulli perché si riferiscono a variabili esplicitate nelle altre equazioni; nelle rimanenti $n - p$ colonne i coefficienti sono nulli perché altrimenti potremmo scegliere tra di esse altri cardini, contrariamente alle ipotesi.

Analogamente a quanto visto prima :

il sistema ammette soluzioni se e solo se $b'' = 0$; in tal caso le soluzioni sono ∞^{n-p} ; ricaviamo le p variabili di base in funzione delle $n - p$ variabili libere.

Riassumendo :

- $p = m$ esistono soluzioni
- $p < m$ l'esistenza di soluzioni non è assicurata
- $p = n$ se c'è soluzione è unica
- $p < n$ se c'è soluzione, non è unica
- $p = m = n$ c'è una ed una sola soluzione.

$$\begin{array}{cc|c} \textcircled{I_p} & N & b' \\ 0 & 0 & b'' \end{array}$$

Teorema di Roché-Capelli

*Il sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la matrice dei coefficienti e quella completa hanno la stessa caratteristica ;
 $\text{car } A = \text{car } M_c$.*

Le soluzioni sono ∞^{n-p} , essendo p la caratteristica comune alle due matrici. Se $p = n$, si ha unicità.

Nel passaggio dalla matrice dei coefficienti a quella completa si aggiunge una colonna. L'unica possibilità di trovare un nuovo termine su cui fare cardine dipende da b'' : se contiene solo termini nulli , non ci sono altri cardini e la caratteristica rimane invariata; se invece contiene almeno un termine non nullo , lo scegliamo come cardine e la caratteristica aumenta di 1. A questo punto il procedimento necessariamente ha termine.

Dunque $\text{car } A = \text{car } M_c \Leftrightarrow b'' = 0$.

Ma sappiamo che il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow b'' = 0$. Questo completa la dimostrazione.

Il fatto che le soluzioni siano ∞^{n-p} l'abbiamo già visto.

Il teorema fornisce le condizioni di risolubilità del sistema; per il momento, però, il risultato non è di grande utilità perchè i calcoli che permettono di stabilire la caratteristica di una matrice sono gli stessi che permettono di risolvere il sistema; in altre parole, la condizione di risolubilità non è ottenuta a priori, cioè senza risolvere il sistema.

Per questo occorre dare un metodo diverso per calcolare la caratteristica.

Vediamo come questo si possa ottenere a partire dalla definizione di determinante.

Determinante di una matrice quadrata, cioè con lo stesso numero di righe e di colonne

La definizione avviene per induzione:

- si definisce il determinante nel caso $n = 1$
- il determinante di una matrice di ordine $n+1$ si calcola a partire da quello delle matrici di ordine n .

A questo proposito diamo la seguente definizione

Data una **matrice quadrata** A di ordine n , sia a_{rs} un suo termine ; chiamiamo **matrice aggiunta** A_{rs} quella ottenuta da A togliendo la riga r e la colonna s ; in tal modo si ottiene una matrice quadrata di ordine $n-1$ ovvero un minore di ordine $n-1$.

Definizione di determinante:

- se $n = 1$, $\det A = a_{11}$
- conoscendo il determinante per matrici di ordine n , definiamolo per una matrice A di ordine $n+1$.

Prendiamo i termini della prima riga

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}$$

Consideriamo le matrici aggiunte

$$A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13} \quad \dots \quad A_{1n}$$

Queste sono minori di ordine n e quindi possiamo calcolarne il determinante per l'ipotesi che abbiamo fatto:

$$\det A_{11} \quad \det A_{12} \quad \det A_{13} \quad \dots \quad \det A_{1n}.$$

Moltiplichiamo coefficienti e determinanti , cambiando il segno al secondo (coeff. 12) , al quarto (coeff. 14) e così via (**cioè a quelli in cui la somma degli indici è DISPARI**) e poi sommiamo .

$(-1)^{1+r}$ vale :

1 se $1 + r$ è pari , cioè se r è dispari

-1 se $1 + r$ è dispari , cioè se r è pari.

Allora possiamo tenere presente la regola dei segni alternati nei vari prodotti moltiplicandoli per l'opportuna potenza di -1 :

$$(-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots +$$

$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

Questo tipo di calcolo si dice sviluppo di un determinante rispetto alla prima riga.

Proprietà importante:

il determinante può essere calcolato a partire da **una qualunque riga o colonna** secondo le regole viste ; **il risultato è sempre lo stesso**. Ricordarsi che il prodotto di un coefficiente per il determinante della matrice aggiunta va lasciato con il suo segno o va cambiato a seconda che la somma degli indici del coefficiente sia pari o dispari.

Esempio $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla prima riga :

$$a_{11} = a \quad \det A_{11} = d \quad \text{somma indici pari} \quad ad$$

$$a_{12} = b \quad \det A_{12} = c \quad \text{somma indici dispari} \quad -bc$$

$$\det A = ad - bc$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla seconda riga :

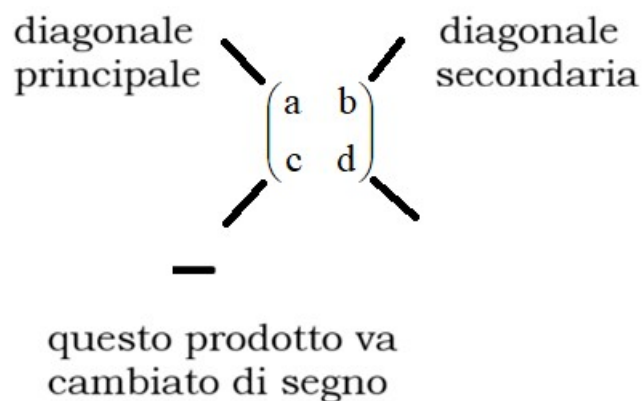
$$a_{21} = c \quad \det A_{21} = b \quad \text{somma indici dispari} \quad -bc$$

$$a_{22} = d \quad \det A_{22} = a \quad \text{somma indici pari} \quad ad$$

$$\det A = ad - bc$$

Sviluppiamo infine rispetto alla prima colonna :

$$\begin{aligned} a_{11} &= a & \det A_{11} &= d & \text{somma indici pari} & & ad \\ a_{21} &= c & \det A_{21} &= b & \text{somma indici dispari} & & -bc \\ \det A &= ad - bc \end{aligned}$$



Esempio $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prima riga : $1 (0 - 3) - 2 (0 + 6) - 1 (0 + 2) = -17$

seconda riga : $0 (0 + 1) + 1 (0 - 2) - 3 (1 + 4) = -17$

Regola di Sarrus : si affiancano alla matrice le prime due colonne (che vengono dunque scritte due volte) :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

3 diagonali che scendono (principali) , 3 che salgono (secondarie)

Sommiamo i prodotti dei termini sulle diagonali discendenti e sottraiamo i prodotti di quelli sulle diagonali ascendenti.

diagonali principali (che scendono)

$$1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 = -12$$

diagonali secondarie (che salgono)

$$(-2) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 = 5 \text{ va cambiato di segno}$$

$$\det A = -12 - 5 = -17$$

Riassumendo

- si sceglie una riga o una colonna
- si prendono i coefficienti di questa riga o colonna
- moltiplichiamo ciascuno di questi coefficienti per il determinante della sua matrice aggiunta
- si lascia il segno del prodotto invariato se la somma degli indici del coefficiente è pari, altrimenti si cambia di segno
- si sommano i singoli prodotti così ottenuti.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Convieni scegliere la seconda colonna o la terza riga data la presenza di due coefficienti nulli (che non danno contributo nel calcolo del determinante, qualunque sia il determinante delle loro matrici aggiunte).

Scegliamo la seconda colonna:

$$-2 \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Questi due possono essere calcolati con la regola di Sarrus o sviluppandoli anch'essi rispetto alla seconda colonna (o riga) dove c'è uno 0:

$$\begin{aligned} & -2 \left\{ -\det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} + \\ & + 2 \left\{ 3 \det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} \\ & = 48. \end{aligned}$$

Proprietà dei determinanti

- il determinante della matrice identica di qualunque ordine vale 1
- poiché il calcolo del determinante non fa distinzione tra righe e colonne , una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante (la matrice trasposta è quella in cui le righe si scambiano con le colonne) .

Per quanto detto sopra tutte le proprietà che valgono per le righe valgono anche per le colonne ; d'ora in poi – per evitare di ripetere due volte la stessa proprietà – parleremo di **linee** per indicare indifferentemente una riga o una colonna.