ANALISI MATEMATICA

(CORSO D - CdL INFORMATICA)

Prova scritta del 11/2/2004

(1) Calcolare il limite della successione:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^3 + a_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \sqrt{3+x^2} \; - \; \log(3+x^2)$$

a) Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
b) Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
c) Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
d) Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Determinare il valore del seguente integrale:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x - (\sin x)^2 - 1} \; dx.$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n + 5^n}.$$

Risoluzione degli esercizi proposti

(1) Calcolare il limite della successione:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^3 + a_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soluzione Per prima cosa vediamo se la successione ammette limite studiandone la monotonia. Infatti, nel caso in cui risulti monotona avrà sicuramente limite per il teorema di regolarità delle successioni monotone. Un primo approccio a questo studio può essere quello di calcolare i valori assunti dai primi termini della successione per avere un'idea dell'andamento: $a_1 = 2$, $a_2 = 2^3+2-1 = 9$, $a_3 = 9^3 + 9 - 1 = 719$, $a_4 = (719)^3 + 719 - 1 = \dots$. Al crescere di n aumenta il corrispondente valore della successione, possiamo quindi sospettare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia crescente. Dimostriamolo. Ricordiamo che una successione è crescente se: $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nel nostro caso:

$$a_n < a_{n+1} \iff a_n < (a_n)^3 + a_n - 1$$

ovvero

$$1 < (a_n)^3 \iff 1 < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

I passaggi effettuati sono tra loro equivalenti, per cui dimostrare che la successione è crescente equivale a provare che $1 < a_n, \forall n \in N$. Per fare questo utilizziamo il principio di induzione:

$(i) 1 < a_1 = 2$

$(ii) 1 < a_n \Longrightarrow 1 < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Per provare (ii) osserviamo che:

$$1 < a_n \iff 1 < a_n^3 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui:

$$a_{n+1} = a_n^3 + a_n - 1 > 1 + 1 - 1 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

In conclusione: la successione ammette è crescente, dunque ammette limite $\mathcal{L}$. Si presentano due casi:

$(1) \mathcal{L} \in \mathbb{R}$

$(2) \mathcal{L} = +\infty$

(Il caso $\mathcal{L} = -\infty$ si esclude perchè $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{R}$.)

(1) Se fosse $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, passando al limite nell'espressione ricorsiva che definisce la successione si ha (ricordiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathcal{L} \iff \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \mathcal{L}$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^3 + \mathcal{L} - 1$$

Questa equazione ha come unica soluzione $\mathcal{L} = 1$. Non è accettabile perché la successione data risulta crescente, quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

mentre abbiamo visto che: $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi concludere che :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Altro metodo per dimostrare la monotonia della successione

La monotonia della succesione può essere dimostrata applicando il principio di induzione nel modo che segue.

(i) $a_1 < a_2$;

(ii)$a_{n-1} < a_n \implies a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Il punto (i) è ovvio, mentre l'induttività della proposizione, punto (ii), si prova nella maniera seguente. Osserviamo che all'espressione che definisce la successione resta associata la funzione:

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

f risulta strettamente crescente su $\mathbb{R}$ perchè la sua derivata prima è positiva:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ da cui

$$a_{n-1} < a_n \implies f(a_n) < f(a_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

La tesi segue da questa implicazione osservando che: $a_n = f(a_{n-1})$, $a_{n+1} = f(a_n)$.

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2} \ - \ \log(3 + x^2)$$

a) Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
b) Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
c) Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
d) Tracciare un grafico approssimato di f.

Soluzione

Le funzioni elementari (radice quadrata e logaritmo) che fanno parte dell'espressione di f sono definite quando i loro argomenti sono rispettivamente non negativi e positivi. Osserviamo che nel nostro caso questi sono costituiti dall'espressione: $3+x^2$ che è positiva per ogni valore della variabile x. La funzione assegnata risulta pertanto definita su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima di f per trovare i suoi intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}} - \frac{2x}{3 + x^2} \tag{1}$$

Da cui deduciamo che $f'(x) = 0$ se e solo se:

$$\frac{\sqrt{3 + x^2}\ x - 2x}{3 + x^2} = 0 \quad \iff \quad x\ (\sqrt{3 + x^2} \ - \ 2) = 0$$

Le soluzioni dell'ultima equazione sono date da: $x_1 = 0$, oppure:

$$\sqrt{3 + x^2} - 2 = 0 \quad \iff \quad \sqrt{3 + x^2} = 2 \quad \iff \quad 3 + x^2 = 4 \quad \iff \quad x^2 = 1 \quad \iff \quad x_{1,2} = \pm 1.$$

Il segno della derivata prima è determinato dal segno del numeratore della frazione di (1), quindi $f'(x) > 0$ per i valori di x che sono soluzioni di:

$$(I) \quad \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{3 + x^2} - 2 > 0 \end{cases} \quad \cup \quad (II) \quad \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{3 + x^2} - 2 < 0 \end{cases}$$

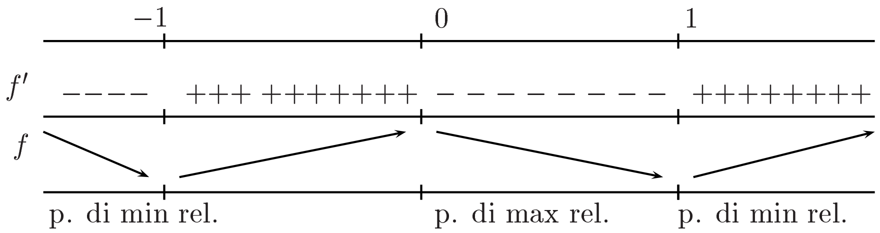
Da cui

$$(I) \quad \begin{cases} x > 0 \\ 3 + x^2 > 4 \end{cases} \quad \cup \quad (II) \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3 + x^2 < 4 \end{cases}$$

che equivale a:

$$(I) \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \quad \cup \quad (II) \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \end{cases}$$

Il sistema (I) ha soluzioni:$x > 1$, Il sistema (II) ha soluzioni: $-1 < x < 0$. In conclusione: $f'(x) > 0$ per $x > 1$ o $-1 < x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ per $x < -1$ o $0 < x < 1$.



Calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}}{3+x^2} - \frac{2(3+x^2) - 4x^2}{(3+x^2)^2} = \frac{3\sqrt{3+x^2} - 6 + 2x^2}{(3+x^2)^2} \tag{2}$$

Il segno di f'' è determinato dal segno del numeratore della frazione di (2). Calcoliamo quindi le soluzioni (se esistono) dell'equazione: $f''(x) = 0$, ovvero $3\sqrt{3+x^2} - 6 + 2x^2 = 0$. Da cui:

$$3\sqrt{3+x^2} = 6 - 2x^2. \tag{3}$$

Risolvere l'equazione (3) equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 6 - 2x^2 \geq 0 \\ 9(3+x^2) = 36 + 4x^4 - 24x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \geq x^2 \\ 27 + 9x^2 = 36 + 4x^4 - 24x^2 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ 4x^2 - 33x^2 + 9 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

L'equazione del sistema è una *biquadratica*, la risolviamo ponendo: $y = x^2$, dunque: $4y^2 - 33y + 9 = 0$. Le soluzioni di questa sono:

$$y_{1,2} = 3 \ \frac{11 \pm \sqrt{105}}{8}$$

Da cui

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3 \ \frac{11 + \sqrt{105}}{8}} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3 \ \frac{11 - \sqrt{105}}{8}}$$

Le radici $x_1, \ x_2$ si scartano in quanto non soddisfano la prima disequazione del sistema (non appartengono all'intervallo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$). Quindi f'' si annulla nei punti x_3, x_4. Vediamo per quali valori di x risulta $f''(x) \geq 0$, ovvero:

$$3\sqrt{3+x^2} - 6 + 2x^2 \geq 0 \quad \iff \quad 3\sqrt{3+x^2} \geq 6 - 2x^2$$

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere:

$$(I)\ \begin{cases} 6-2x^2 \geq 0 \\ 9(\sqrt{3+x^2})^2 \geq (6-2x^2)^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \quad (II)\ 6-2x^2<0 \tag{5}$$

Consideriamo la prima disequazione del sistema (I), essa ha soluzioni: $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. La seconda disequazione di (I) diventa:

$$4x^4 - 33x^2 + 9 \leq 0$$

Ponendo $y = x^2$, otteniamo:

$$4y^2 - 33y + 9 \leq 0$$

che ha soluzioni:

$$3\frac{11-\sqrt{105}}{8} \leq y \leq 3\frac{11+\sqrt{105}}{8}$$

da cui se $x > 0$:

$$\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}} \leq x \leq \sqrt{3\frac{11+\sqrt{105}}{8}}$$

se invece $x < 0$:

$$-\sqrt{3\frac{11+\sqrt{105}}{8}} \leq x \leq \sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}}$$

Tenuto conto della prima equazione di (I) si ha che le soluzioni del sistema (I) sono:

$$\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}} \leq x \leq \sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}}$$

Le soluzioni di (II) sono invece:

$$x < -\sqrt{3} \quad \text{oppure} \sqrt{3} < x.$$

In conclusione risulta $f''(x) \geq 0$, quindi f convessa, per i valori della variabile x appartenenti all'insieme:

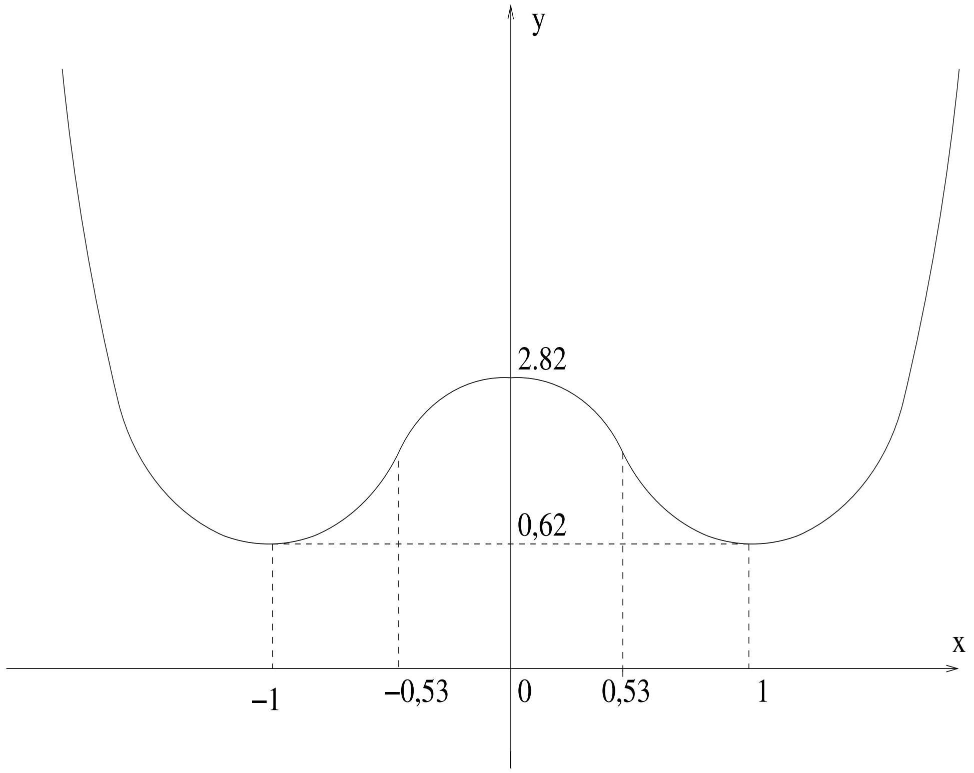
$$\left\{ x : \sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}} \leq x \quad \text{oppure} \quad x \leq -\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}} \right\}.$$

Ovviamente nel complementare risulterà: $f'' \leq 0$, quindi f concava.

Riassumiamo nel seguente diagramma i risultati sopra ottenuti:

		$-\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}}$		0		$\sqrt{3\frac{11-\sqrt{105}}{8}}$	
f''	++++		−−− −−−−−−−		− − − − − − − − −		++++++++
f	*convessa*		*concava*				*convessa*
		p. di flesso				p. di flesso	

Grafico della funzione



3 Determinare il valore del seguente integrale:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x - (\sin x)^2 - 1}\ dx.$$

Svolgimento

Sostituiamo al denominatore della funzione integranda: $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$

$$\int \frac{\sin x}{(\cos x)^2 + \cos x - 2}\ dx.$$

Effettuiamo nell'integrale il seguente cambiamento di variabile: $t = \cos x$, quindi $dt = -\sin x dx$. Sostituiamo nell'integrale:

$$\int \frac{-1}{t^2 + t - 2}\quad dt.$$

La funzione integranda è una funzione razionale. Calcoliamo le radici del denominatore: $t^2+t-2 = 0$ $t_1 = 1,\ t_2 = -2$. Determiniamo quindi $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{-1}{t^2+t-2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2}$$

Ovvero:

$$\frac{-1}{t^2+t-2} = \frac{(A+B)t + 2A - B}{(t-1)(t+2)}$$

L'identità è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ per i valori di A, B che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -B \\ -3B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n + 5^n}.$$

Svolgimento.

La serie assegnata è a termini di segno costante (positivo), possiamo applicare quindi uno dei criteri di convergenza relativi a questo tipo di serie, ad esempio il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}+5^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n+5^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} + 5^{(n+1)}} \frac{n^n + 5^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n^n + 5^n)}{(n+1)^{(n+1)} + 5^{(n+1)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{1 + \frac{5^n}{n^n}}{1 + \frac{5^{(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{5^n}{n^n}}{1 + \frac{5^{(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Il limite è minore di uno quindi la serie converge.